JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE,

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

TOME DEUXIÈME. — ANNÉE 1876.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1876

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

EXPLICATION

DES

IRRÉGULARITÉS OBSERVÉES DANS LE MOUVEMENT D'URANUS.

Fondée sur l'hypothèse des perturbations causées par une planète plus éloignée; comprenant une détermination de la masse, de l'orbite et de la position du corps perturbant;

PAR M. J.-C. ADAMS, M. A.,

Membre du collége de Saint-Jean, à Cambridge,
de la Société royale astronomique et de la Société philosophique de Cambridge.

(Extrait de l'Appendice du *Nautical Almanac* pour l'année 1851 [*].)

AVERTISSEMENT.

Cet écrit fut communiqué par l'auteur à la Société royale astronomique et lu à ce corps dans sa séance ordinaire, le 13 novembre 1846. L'imprimerie de la Société étant occupée à un long écrit sur la longitude de Valence, par

[*] Les astronomes avaient depuis longtemps observé dans la marche d'Uranus des anomalies d'un caractère particulier. Pour rendre compte de ces irrégularités, plusieurs

l'astronome royal, et la publication urgente de l'œuvre de M. Adams ayant été regardée comme d'intérêt national, prière en conséquence fut adressée à M. le capitaine W.-H. Smyth, de la marine royale, président, et au révérend R. Sheepshanks, secrétaire de la Société, qui, avec leur diligence et zèle habituels, accordèrent la permission d'imprimer et de publier l'écrit par les soins de la rédaction du *Nautical Almanac;* c'est en vertu de ces circonstances que les investigations de M. Adams paraissent pour la première fois comme extrait de l'Appendice du *Nautical Almanac* de 1851.

W.-S. STRATFORD,
Directeur du *Nautical Almanac.*

Bureau du *Nautical Almanac,*
3, Verulam Buildings, Gray's Inn.
Londres, 31 décembre 1846.

---

hypothèses avaient été imaginées à différentes époques. La plus accréditée parmi les savants était celle qui consistait à supposer l'existence d'une planète dont la position aurait échappé à l'observation des astronomes et faisant dévier Uranus de sa route normale par son attraction propre. Cette hypothèse n'avait jamais été soumise à l'épreuve de l'Analyse mathématique avant l'année 1845. La question à résoudre était la suivante : Étant données les observations des positions d'Uranus, calculer les éléments du nouvel astre et, en particulier, sa place dans le ciel à une époque déterminée. Le problème fut résolu simultanément, en Angleterre, par M. Adams, et en France par M. Le Verrier, qui, ainsi que le reconnaît M. Adams, a publié le premier les résultats de ses recherches. On sait que, quelque temps après, l'astronome Galle aperçut, parmi les étoiles et la XXI^e heure, l'image d'une planète inconnue dansant dans le champ étroit de son télescope. Il est impossible de rencontrer, dans l'histoire des Sciences, une découverte qui fasse plus d'honneur au génie humain. Les lois de Newton recevaient ainsi la plus éclatante des confirmations, et l'Astronomie, désormais indiscutable dans ses principes, était arrivée à l'état de science parfaite.

Le Mémoire de M. Adams a valu, à juste titre, à son auteur la plus glorieuse célébrité; il est digne, en effet, de figurer à côté des plus beaux Mémoires de Laplace et de Lagrange.

C'est pourquoi, cédant aux sollicitations pressantes de plusieurs mathématiciens éminents, nous avons résolu de publier *in extenso* l'œuvre du savant Directeur de l'Observatoire de Cambridge. Pour nous faciliter la publication de ce précieux document, M. Adams lui-même a bien voulu nous aider de son concours et enrichir notre traduction d'un Appendice dont le lecteur appréciera l'intérêt et l'importance.

(H. R.)

SUR LES PERTURBATIONS D'URANUS.

1. Les irrégularités du mouvement d'Uranus ont longtemps attiré l'attention des astronomes. Quand l'orbite de cette planète fut approximativement connue, on constata que, avant sa découverte par sir W. Herschel en 1781, elle avait été à plusieurs reprises remarquée comme étoile fixe par Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier. Bien que ces observations soient évidemment très-inférieures en exactitude à celles de nos jours, on doit les considérer comme valables, en raison de la grande extension qu'elles donnent à l'arc observé de l'orbite de la planète. Toutefois Bouvard, à qui nous devons les Tables d'Uranus aujourd'hui en usage, trouva qu'il était impossible de se contenter de ces observations, sans attribuer aux observations modernes des erreurs beaucoup plus graves qu'elles n'en comportent : il fonda donc ses Tables exclusivement sur les observations les plus récentes; mais, dans l'espace d'un très-petit nombre d'années, des erreurs sensibles recommencèrent à se produire, et, bien que ces Tables ne datent que de 1821, leur erreur en ce moment dépasse 2 minutes d'espace, et elle continue à s'accroître rapidement. Il n'y avait donc plus de raison suffisante pour rejeter les anciennes observations, surtout depuis que, à l'exception de la première observation de Flamsteed, qui est antérieure de plus de vingt ans à toutes les autres, elles se confirment réciproquement les unes les autres.

2. Aujourd'hui que la découverte d'une autre planète a confirmé de la manière la plus brillante les conclusions de l'Analyse, et qu'elle nous a autorisés à rapporter ces irrégularités à leur véritable cause, je puis me dispenser de m'étendre plus au long sur les raisons qui m'ont porté à rejeter les différentes autres hypothèses formées pour les expliquer. Il me suffira de dire qu'elles paraissaient toutes improbables en elles-mêmes et ne semblaient pas susceptibles d'être mises à l'épreuve d'un calcul précis. Quelques-uns étaient allés jusqu'à supposer que, vu la grande distance qui sépare Uranus du Soleil, la loi d'attraction n'est plus celle du carré inverse des distances; mais la loi de la gravitation était trop solidement établie pour qu'on pût admettre cette hypothèse, tant qu'on n'aurait pas réfuté toutes les autres hypothèses, et j'étais convaincu que, dans cette question, comme dans toutes les questions antérieures de même nature, les différences qui, pendant un certain temps, avaient fait douter de la vérité de la loi, finiraient par la confirmer de la manière la plus frappante.

3. Mon attention fut, pour la première fois, dirigée sur ce sujet, il y a quelques années, par la lecture de l'excellent Rapport de M. Airy, sur les progrès les plus récents de l'Astronomie. Je trouve dans mes papiers la Note suivante datée du 3 juillet 1841 : « Formé (j'ai) le projet, au commencement de cette semaine, d'étudier aussitôt que possible, après avoir pris mon grade [*], les irrégularités dans le mouvement d'Uranus qui restent encore inexpliquées, à l'effet de trouver si l'on doit les attribuer à l'action d'une planète plus éloignée et non encore découverte et, s'il est possible, de déterminer approximativement les éléments de son orbite, etc., ce qui entraînerait probablement la découverte de cette planète. » Donc, en 1843, je tentai une première solution du problème, en supposant que l'orbite fût un cercle avec un rayon égal à deux fois la distance moyenne d'Uranus au Soleil. Une hypothèse relative à la distance moyenne était évidemment nécessaire en premier lieu, et il était probable, d'après la loi de Bode, qu'en cela je ne m'éloignerais pas beaucoup de la vérité. Cette recherche était fondée exclusivement sur les observations modernes, et les erreurs de Tables étaient prises égales à celles que donnaient les équations de condition des Tables de Bouvard, jusqu'à l'année 1821 et, à partir de cette époque, les erreurs étaient tirées des observations données dans les *Astronomische Nachrichten* et des observations de Cambridge et de Greenwich. Le résultat me prouva qu'il y avait moyen d'établir un accord général et satisfaisant entre la théorie et l'observation ; mais les différences les plus grandes se produisant dans les années où les observations étaient peu nombreuses, en outre, les observations planétaires de Greenwich étant alors en voie de réduction, je m'adressai à M. Airy, grâce à l'obligeante intervention de M. le professeur Challis, pour obtenir les ob-

[*] Celui de *bachelier ès Arts*.

servations de quelques années dans lesquelles l'accord paraissait moins satisfaisant. L'astronome royal eut l'extrême bonté de m'envoyer, en février 1844, les résultats de toutes les observations d'Uranus faites à Greenwich.

4. Cependant l'Académie royale des Sciences de Gœttingue avait proposé la théorie d'Uranus comme sujet du prix de Mathématiques. D'importants devoirs que m'imposait mon collége ne me laissaient que peu de loisirs et ne me permettaient pas de tenter l'étude complète de cette théorie, étude sans laquelle on ne pouvait guère aspirer au prix; cependant le but indiqué et la possession de précieuses séries d'observations me décidèrent à tenter une nouvelle solution du problème. Je tins dès lors compte des termes les plus importants dépendant de la première puissance de l'excentricité de la planète perturbatrice, en conservant toujours l'hypothèse relative à la distance moyenne. Quant aux observations modernes, les erreurs des Tables furent empruntées exclusivement aux observations de Greenwich, jusqu'à l'année 1830, excepté toutefois une observation faite par Bessel, en 1823; je puisai ensuite dans les observations de Cambridge et de Greenwich, ainsi que dans celles que publièrent différents numéros des *Astronomische Nachrichten*. Les erreurs des Tables, pour les anciennes observations, furent prises dans les équations de condition des Tables de Bouvard. Après avoir obtenu différentes solutions presque identiques, en tenant graduellement compte d'un nombre croissant de termes de la série exprimant les perturbations, je communiquai à M. le professeur Challis, en septembre 1845, les valeurs finales que j'avais obtenues pour la masse, la longitude héliocentrique et les éléments de l'orbite de la planète présumée. Les mêmes résultats, légèrement modifiés, furent communiqués par moi, en octobre 1845, à l'astronome royal. L'excentricité ayant dépassé mes prévisions, et des observations postérieures ayant établi que la théorie, basée sur l'hypothèse initiale de la distance moyenne, était encore dans une erreur assez notable, je recommençai mon étude en diminuant la distance moyenne de $\frac{1}{30}$. Le résultat, que je communiquai à M. Airy dans les premiers jours du mois de septembre de la présente année, parut plus

satisfaisant que mon premier, l'excentricité étant moindre et les erreurs de théorie comparées avec les dernières observations étant moins grandes, ce qui me porta à penser que la distance devait être encore diminuée.

5. En novembre 1845, M. Le Verrier présenta à l'Académie royale des Sciences de Paris une étude très-complète et très-détaillée de la théorie d'Uranus, lequel éprouverait des perturbations par l'action de Jupiter et de Saturne; il y accusait de petites inégalités qui jusqu'ici avaient été négligées. Au mois de juin de la présente année (1846), il a fait suivre son étude d'un Mémoire dans lequel il a attribué les autres perturbations à l'action d'une autre planète deux fois plus éloignée du Soleil qu'Uranus. Il a trouvé la longitude de la nouvelle planète à très-peu de chose près égale à celle que j'ai obtenue grâce à la même hypothèse. Le 31 août il a présenté à l'Académie une étude plus complète, dans laquelle il a déterminé la masse et les éléments de l'orbite de la nouvelle planète. Il a aussi obtenu les valeurs limitées de sa distance moyenne et de sa longitude héliocentrique. Je mentionne ces dates uniquement pour montrer que mes résultats ont été obtenus indépendamment de ceux de M. Le Verrier et avant qu'il eût publié les siens; je n'ai d'ailleurs pas l'intention de lui disputer l'honneur de cette découverte, car il est hors de doute que ses résultats ont été publiés les premiers et ont aidé le Dr Galle à découvrir effectivement la planète en question. Les faits cités plus haut ne peuvent diminuer en rien le mérite de M. Le Verrier.

6. Pour ne pas avoir une multitude gênante d'équations de condition, j'ai divisé les observations modernes en groupes, comprenant chacun une période de trois années, et, comme M. Airy avait montré que l'erreur du rayon vecteur des Tables était assez considérable, j'ai choisi les observations faites lors de l'opposition, ou j'ai combiné les autres de manière que le résultat fût à peu près exempt des effets de cette erreur. D'après les observations de chaque groupe, l'erreur des Tables pour la longitude héliocentrique était calculée pour le temps d'opposition moyenne dans l'année moyenne du groupe. Ainsi ont été déduites vingt et une erreurs normales des Tables, correspondant à un nombre égal de périodes équidistantes entre 1780 et 1840. L'erreur pour 1780 a été obtenue en interpolant entre les erreurs de

1781, 1782 et 1783 d'une part, et celles données par les anciennes observations de 1769 et 1771 de l'autre; bien que l'erreur ainsi dérivée (pour 1780) n'ait pas le même poids que les autres, elle ne doit pas, à mon avis, offrir une grande incertitude. Dans mes derniers calculs, j'aurais pu employer les résultats d'observations plus récentes; mais, pour obtenir l'effet dû au changement de la distance moyenne, force m'a été de fonder ma recherche sur les mêmes éléments qu'auparavant, et les dernières observations pourraient servir de contrôle à la théorie.

7. Pour m'assurer qu'il n'y avait pas d'erreur grave dans les Tables de Bouvard [*], j'ai recalculé toutes les principales inégalités produites par l'action de Jupiter et de Saturne, et je n'ai trouvé de différence notable que dans l'équation dépendant de la longitude moyenne de Saturne moins deux fois celle d'Uranus, erreur déjà signalée par Bessel. Il a aussi fallu corriger la principale équation dépendant de l'action de Jupiter, par suite de l'augmentation de valeur obtenue dernièrement pour la masse de cette planète. Il faut donc apporter aux Tables de Bouvard les corrections suivantes :

$$\begin{aligned}&+1'',918\sin(\varphi_1-2\varphi_2-13^\circ 1',5)\\&+1'',085\sin(\varphi-\varphi_2),\end{aligned}$$

φ, φ_1, φ_2 étant respectivement les longitudes moyennes de Jupiter, Saturne et Uranus. Dans la réduction des observations de Greenwich, on a déjà tenu compte de la dernière correction. M. Hansen ayant aussi trouvé, dans le mouvement d'Uranus, de nouvelles inégalités provenant du carré de la force perturbatrice, j'en ai recalculé les valeurs, en suivant la méthode donnée par M. Delaunay dans la *Connaissance des Temps* pour 1845, et mes résultats ont parfaitement concordé avec les siens, les termes à ajouter à la longitude étant

$$\begin{aligned}&+32'',00\sin(3\varphi_2-6\varphi_1+2\varphi+22^\circ.18',8)\\&-\ \ 8,35\sin(2\varphi_2-6\varphi_1+2\varphi+39.10,5)\\&-\ \ 1,49\sin(4\varphi_2-6\varphi_1+2\varphi+34.48,4)\end{aligned}$$

En ce qui concerne les inégalités d'ordres supérieurs négligées par

[*] *Voir* l'Appendice.

Bouvard, j'ai pensé que les plus importantes d'entre elles seraient ou bien celles de longue période, ou bien celles dont la période était presque égale à celle d'Uranus. Durant les $\frac{3}{4}$ d'une révolution de la planète, les effets de la première classe se confondraient presque avec ceux qui proviennent du changement d'époque et de mouvement moyen, et ceux de la dernière classe avec les effets produits par un changement constant dans l'excentricité et la longitude du périhélie. La position de la planète à déterminer serait donc peu affectée par ces termes, et les autres seraient probablement bien moindres que ceux qu'il faudrait négliger dans une première approximation vers les perturbations produites par la nouvelle planète.

8. En tenant compte des quelques corrections mentionnées ci-dessus, les différences résiduelles entre les longitudes héliocentriques observées et les longitudes calculées, seraient les suivantes :

Observations anciennes.		Observations modernes.	
Années.	Observation — Calcul.	Années.	Observation — Calcul.
1690.......	+61",2	1780.......	+ 3",46
1712.......	+92,7	1783.......	+ 8,45
1715.......	+73,8	1786.......	+12,36
1750.......	−47,6	1789.......	+19,02
1753.......	−39,5	1792.......	+18,70
1756.......	−45,7	1795.......	+21,38
1764.......	−34,9	1798.......	+20,95
1769.......	−19,3	1801.......	+22,21
1771.......	− 2,3	1804.......	+24,16
		1807.......	+22,07
		1810.......	+23,16
		1813.......	+22,00
		1816.......	+22,88
		1819.......	+20,69
		1822.......	+20,97
		1825.......	+18,16
		1828.......	+10,82
		1831.......	− 3,98
		1834.......	−20,80
		1837.......	−42,66
		1840.......	−66,64

9. On voit aisément que la série exprimant la correction de la longitude moyenne en termes des corrections appliquées aux éléments de l'orbite est plus convergente que celle qui donne la correction de la longitude *vraie*, et la même chose est vraie pour les perturbations de la longitude moyenne, comparées à celles de la longitude vraie. Les corrections trouvées plus haut ont donc été converties en corrections de la longitude moyenne, en multipliant chacune d'elles par le facteur $\frac{r^2}{ab}$, r étant le rayon vecteur et a et b les demi-axes de l'orbite. Par suite, ces dernières corrections sont devenues

Observations anciennes.		Observations modernes.	
Années.	Observation — Calcul.	Années.	Observation — Calcul.
1690.......	$+62'',6$	1780.......	$+\ 3'',42$
1712.......	$+84,5$	1783.......	$+\ 8,19$
1715.......	$+67,2$	1786.......	$+11,74$
1750.......	$-51,8$	1789.......	$+17,75$
1753.......	$-43,2$	1792.......	$+17,22$
1756.......	$-50,1$	1795.......	$+19,52$
1764.......	$-37,8$	1798.......	$+19,06$
1769.......	$-20,5$	1801.......	$+20,24$
1771.......	$-\ 2,4$	1804.......	$+22,19$
		1807.......	$+20,52$
		1810.......	$+21,89$
		1813.......	$+21,19$
		1816.......	$+22,50$
		1819.......	$+20,78$
		1822.......	$+21,50$
		1825.......	$+18,97$
		1828.......	$+11,50$
		1831.......	$-\ 4,29$
		1834.......	$-22,63$
		1837.......	$-46,70$
		1840.......	$-73,09$

Ces nombres forment la base des recherches subséquentes.

10. Supposons que $\delta\varepsilon$, δa, δe et $\delta\varpi$ indiquent les corrections applicables aux éléments tabulaires d'Uranus, la correction de la longitude moyenne dans un temps t quelconque sera égale à

$$\delta\varepsilon + 2e^2\delta\varpi + t\delta n - \left[2\cos(nt+\varepsilon-\varpi) + \frac{e}{2}\cos 2(nt+\varepsilon-\varpi)\right] e\,\delta\varpi$$
$$+ \left[2\sin(nt+\varepsilon-\varpi) + \frac{e}{2}\sin 2(nt+\varepsilon-\varpi)\right]\delta e.$$

Si nous comprenons le petit terme $2e^2\delta\varpi$ dans la quantité $\delta\varepsilon$, cette correction pourra être mise sous la forme suivante :

$$\delta\varepsilon + t\,\delta n + \cos nt\,\delta x_1 + \sin nt\,\delta y_1 + \cos 2nt\,\delta x_2 + \sin 2nt\,\delta y_2,$$

expression dans laquelle

$$\delta x_2 = \tfrac{1}{4}e[\cos(\varepsilon-\varpi)\delta x_1 + \sin(\varepsilon-\varpi)\delta y_1],$$
$$\delta y_2 = -\tfrac{1}{4}e[\sin(\varepsilon-\varpi)\delta x_1 - \cos(\varepsilon-\varpi)\delta y_1].$$

11. De plus, si nous adoptons la notation de la théorie analytique de Pontécoulant, les perturbations de longitude moyenne seront égales à

$$\frac{m'}{2}\,\Sigma\,\mathrm{F}_i \sin i\,(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')$$
$$+ m'e\,\Sigma\mathrm{G}_i \sin[i(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')] - (nt + \varepsilon - \varpi),$$
$$+ m'e'\,\Sigma\mathrm{H}_i \sin[i(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')] - (nt + \varepsilon - \varpi').$$

Ici les lettres accentuées appartiennent à la planète perturbatrice, i prend toutes les valeurs intégrales, positives et négatives, excepté zéro, et, si nous posons $i(n-n')=z$, les valeurs de F_i, G_i et H_i seront

$$\mathrm{F}_i = \left[\frac{3in^4}{z^2(z^2-n^2)} + \frac{in^2}{z^2-n^2}\right] a\mathrm{A}_i + \frac{2n^3}{z(z^2-n^2)}\,a^2\frac{d\mathrm{A}_i}{da},$$

$$\mathrm{G}_i = \left[-\frac{3i(i-1)n^4}{(z-n)^2 z(z-2n)} - \frac{i(i+1)n^2}{z(z-2n)} + \frac{in^2}{z^2-n^2} + \frac{3in^3}{z(z-n)(z-2n)}\right] a\mathrm{A}_i$$
$$+ \left[-\frac{3}{2}\frac{(i-1)n^4}{(z-n)^2 z(z-2n)} - \frac{1}{2}\frac{(i-1)n^2}{z(z-2n)} - \frac{1}{2}\frac{n^2}{z^2-n^2} - \frac{2in^3}{z(z-n)(z-2n)}\right] a^2\frac{d\mathrm{A}_i}{da}$$
$$- \frac{n^3}{z(z-n)(z-2n)}\,a^3\frac{d^2\mathrm{A}_i}{da^2}.$$

$$\mathrm{H}_i = \left[\frac{3}{2}\frac{(i-1)(2i-1)n^4}{(z-n)^2 z(z-2n)} + \frac{1}{2}\frac{(i-1)(2i-1)n^2}{z(z-2n)}\right] a\mathrm{A}_{i-1}$$
$$+ \left[\frac{3}{2}\frac{(i-1)n^4}{(z-n)^2 z(z-2n)} + \frac{1}{2}\frac{(i-1)n^2}{z(z-2n)} + \frac{2in^3}{z(z-n)(z-2n)}\right] a^2\frac{d\mathrm{A}_{i-1}}{da}$$
$$+ \frac{n^3}{z(z-n)(z-2n)}\,a^2\frac{d^2\mathrm{A}_{i-1}}{da^2}.$$

12. Maintenant, si nous posons $\frac{a}{a'}$ ou $\alpha = \sin 30° = 0,5$, les valeurs des quantités fondamentales b, $\alpha \frac{db}{d\alpha}$, $\alpha^2 \frac{d^2 b}{d\alpha^2}$ seront

$$\log b_0 = 0,33170,\quad \log \alpha \frac{db_0}{d\alpha} = 9,53765,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_0}{d\alpha^2} = 9,77848.$$

$$\log b_1 = 9,74497,\quad \log \alpha \frac{db_1}{d\alpha} = 9,83868,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_1}{d\alpha^2} = 9,70857,$$

$$\log b_2 = 9,32425,\quad \log \alpha \frac{db_2}{d\alpha} = 9,68012,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_2}{d\alpha^2} = 9,87776,$$

$$\log b_3 = 8,94670,\quad \log \alpha \frac{db_3}{d\alpha} = 9,46315,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_3}{d\alpha^2} = 9,86253.$$

En conséquence les principales inégalités de longitude moyenne, produites par l'action de la planète dont la masse est $\frac{m'}{5000}$, celle du Soleil étant prise pour unité, et l'excentricité de l'orbite de la planète étant $\frac{e'}{20}$, seront

$$\begin{array}{lll}
-36'',99\,m' & \sin & (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
+58,97\,m' & \sin 2 & (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
+5,80\,m' & \sin 3 & (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
+2,06\,m' & \sin & (n't + \varepsilon' - \varpi) \\
-4,30\,m'e' & \sin & (n't + \varepsilon' - \varpi') \\
+31,25\,m' & \sin & (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\
-12,14\,m'e' & \sin & (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\
+48,55\,m' & \sin & (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi) \\
-93,01\,m'e' & \sin & (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi')
\end{array}$$

On peut y ajouter les suivantes, qui sont de deux dimensions en termes des excentricités :

$$\begin{array}{l}
+0'',57\,m' \quad \sin 3\,(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
-1,08\,m'e' \sin [3\,(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') - \varpi + \varpi']
\end{array}$$

Ces expressions peuvent être mises sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
& h_1 \cos(n - n')t + h_2 \cos 2(n - n')t + h_3 \cos 3(n - n')t \\
& + k_1 \sin(n - n')t + k_2 \sin 2(n - n')t + k_3 \sin 3(n - n')t \\
& - p_1 \cos n't + p_2 \cos(n - 2n')t + p_3 \cos(2n - 3n')t \\
& - q_1 \sin n't + q_2 \sin(n - 2n')t + q_3 \sin(2n - 3n')t
\end{aligned}
$$

13. Prenons le temps de l'opposition moyenne en 1810 comme l'époque à partir de laquelle t est calculé ; cette date, exprimée en fractions décimales d'année, sera 1810,328. De plus, supposons que trois périodes synodiques d'Uranus, comprenant 3,0362 années, soient prises comme unité de temps, alors le changement de l'anomalie moyenne dans une unité de temps sera $13^\circ 0',5$; de plus $n = 13^\circ 0',6$; $n' = 4^\circ 36,0$, par conséquent $n - n' = 8^\circ 24',6$, $n - 2n' = 3^\circ 48',6$, $2n - 3n' = 12^\circ 13',2$: les équations de condition données par les observations modernes auront la forme

$$
\begin{aligned}
c'' = \quad & \delta\varepsilon + \delta x_1 \cos(13^{\circ}.0',5)t + \delta x_2 \cos(26^{\circ}.1',0)t \\
& + t\delta n + \delta y_1 \sin(13.\ 0,5)t + \delta y_2 \sin(26.\ 1,0)t \\
& + h_1 \cos(8.24,6)t + h_2 \cos(16.49,2)t + h_3 \cos(25^{\circ}.13',8)t \\
& + h_2 \sin(8.24,6)t + k_2 \sin(16.49,2)t + k_3 \sin(25.13,8)t \\
& + p_1 \cos(4.36,0)t + p_2 \cos(3.48,6)t + p_3 \cos(12.13,2)t \\
& + q_1 \sin(4.36,0)t + q_2 \sin(3.48,6)t + q_3 \sin(12.13.2)t
\end{aligned}
$$

dans laquelle t prend toutes les valeurs intégrales de -10 à $+10$ sans interruption et les quelques valeurs de c'' sont contenues dans la Table donnée au n° 9.

14. Les équations finales, pour les corrections des éléments elliptiques, seront trouvées en multipliant chaque équation successivement par les coefficients de $\delta\varepsilon$, δn, δx et δy qui s'y rencontrent et en additionnant les différents résultats ainsi obtenus.

On traitera les équations de la même manière relativement aux quantités h_1, k_1, h_2, k_2, h_3, k_3, p_2, q_2, p_3, q_3.

On verra que, par l'effet de l'arrangement donné aux équations de condition, les équations ainsi formées se partagent naturellement en deux groupes, dont l'un embrasse seulement $\delta\varepsilon$, δx_1, δx_2, avec les quantités h et p, tandis que l'autre embrasse δn, δy_1, δy_2, avec les quantités k et q.

De plus, les coefficients, dans ces équations, sont aisément calculés par les formules suivantes, en faisant $t = 10$ dans leurs membres de droite :

$$\begin{aligned}
\Sigma 2 \cos mt &= \frac{\sin m(t+\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}m},\\
\Sigma 2 t \sin mt &= \frac{(t+1)\sin mt - t\sin m(t+1)}{2\sin^2\frac{1}{2}m},\\
\Sigma 2 \cos mt \cos nt &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)(t+\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}(m-n)} + \frac{\sin(m+n)(t+\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}(m+n)}\right],\\
\Sigma 2 \sin mt \sin nt &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)(t+\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}(m-n)} - \frac{\sin(m+n)(t+\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}(m+n)}\right],\\
\Sigma 2 \cos^2 mt &= t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin m(2t+1)}{\sin m},\\
\Sigma 2 \sin^2 mt &= t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin m(2t+1)}{\sin m}.
\end{aligned}$$

15. En effectuant les calculs, on trouve que les équations du premier groupe sont

$$(\varepsilon)\quad \left\{\begin{aligned}
151'',48 = {}& 21,0000\,\delta\varepsilon + 6,0670\,\delta x_1 - 4,4358\,\delta x_2\\
&+ 13,6320\,h_1 + 0,4043\,h_2 - 4,5608\,h_3\\
&+ 18,6046\,p_1 + 19,3384\,p_2 + 7,3721\,p_3,
\end{aligned}\right.$$

$$(x)\quad \left\{\begin{aligned}
246,48 = {}& 6,0670\,\delta\varepsilon + 8,2821\,\delta x_1 + 4,1762\,\delta x_2\\
&+ 7,4041\,h_1 + 8,2523\,h_2 + 4,6963\,h_3\\
&+ 6,5389\,p_1 + 9,3978\,p_2 + 8,1831\,p_3,
\end{aligned}\right.$$

$$(h_1)\quad \left\{\begin{aligned}
209,74 = {}& 13,6320\,\delta\varepsilon + 7,4041\,\delta x_1 - 0,2337\,\delta x_2\\
&+ 10,7022\,h_1 + 4,5356\,h_2 - 0,0018\,h_3\\
&+ 12,7013\,p_1 + 12,9883\,p_2 + 8,0038\,p_3,
\end{aligned}\right.$$

$$(h_2)\quad \left\{\begin{aligned}
242,68 = {}& 0,4043\,\delta\varepsilon + 8,2523\,\delta x_1 + 7,5650\,\delta x_2\\
&+ 4,5356\,h_1 + 10,2960\,h_2 + 8,1944\,h_3\\
&+ 1,7866\,p_1 + 1,3667\,p_2 + 7,6671\,p_3
\end{aligned}\right.$$

$$(h_3)\left\{\begin{aligned}86'',67 &= -\ 4,5608\,\delta\varepsilon + \ 4,6963\,\delta x_1 + 10,5023\,\delta x_2\\ &\quad -\ 0,0018\,h_1 + \ 8,1944 h_2 \ + 10,7071\,h_3\\ &\quad -\ 3,0812\,p_1 - \ 3,5347 p_2 \ + \ 3,8855 p_3,\end{aligned}\right.$$

$$(p_2)\left\{\begin{aligned}165,99 &= \ 19,3384\,\delta\varepsilon + \ 6,3978\,\delta x_1 - \ 3,4948\,\delta x_2\\ &\quad + 12,9883\,h_1 + \ 1,3667 h_2 \ - \ 3,5347\,h_3\\ &\quad + 17,2795\,p_1 + 17,9106\,p_2 \ + \ 7,5423 p_3,\end{aligned}\right.$$

$$(p_3)\left\{\begin{aligned}242,56 &= \ 7,3721\,\delta\varepsilon + \ 8,1831\,\delta x_1 + \ 3,4071\,\delta x_2\\ &\quad + \ 8,0038 h_1 + \ 7,6671\,h_2 \ + \ 3,8855 h_3\\ &\quad + \ 7,6127 p_1 + \ 7,5423 p_2 \ + \ 8,2019 p_3.\end{aligned}\right.$$

16. Si, au moyen de (ε), on élimine $\delta\varepsilon$ de chacune des autres équations, ces dernières deviennent

$$(x)\left\{\begin{aligned}202'',72 &= \ 6,5294\,\delta x_1 + 5,4577\,\delta x_2 + 3,4658 h_1 + \ 8,1355 h_2\\ &\quad + 6,0139\,h_3 + 1,1640\,p_1 + 0,8109 p_2 + \ 6,0533 p_3,\end{aligned}\right.$$

$$(h_1)\left\{\begin{aligned}111,41 &= \ 3,4658\,\delta x_1 + 2,6458\,\delta x_2 + 1,8531\,h_1 + \ 4,2731\,h_2\\ &\quad + 2,9588\,h_3 + 0,6243\,p_1 + 0,4349 p_2 + \ 3,2183 p_3,\end{aligned}\right.$$

$$(h_2)\left\{\begin{aligned}239,76 &= \ 8,1355\,\delta x_1 + 7,6504\,\delta x_2 + 4,2731\,h_1 + 10,2882 h_2\\ &\quad + 8,2822\,h_3 + 1,4284\,p_1 + 0,9944 p_2 + \ 7,5252 p_3,\end{aligned}\right.$$

$$(h_3)\left\{\begin{aligned}119,57 &= \ 6,0139\,\delta x_1 + 9,5389\,\delta x_2 + 2,9588 h_1 + \ 8,2822 h_2\\ &\quad + 9,7166 h_3 + 0,9593\,p_1 + 0,6652 p_2 + \ 5,4866 p_3,\end{aligned}\right.$$

$$(p_2)\left\{\begin{aligned}26,50 &= \ 0,8109\,\delta x_1 + 0,5900\,\delta x_2 + 0,4349 h_1 + \ 0,9944 h_2\\ &\quad + 0,6652 h_3 + 0,1470\,p_1 + 0,1024 p_2 + \ 0,7535 p_3,\end{aligned}\right.$$

$$(p_3)\left\{\begin{aligned}189,38 &= \ 6,0533\,\delta x_1 + 4,9643\,\delta x_2 + 3,2183 h_1 + \ 7,5252 h_2\\ &\quad + 5,4866\,h_3 + 1,0815\,p_1 + 0,7535 p_2 + \ 5,6139 p_3.\end{aligned}\right.$$

17. Si maintenant, au moyen de (x), nous éliminons δx_1 de chacune des autres équations, nous trouvons

$$(h_1)\left\{\begin{aligned}3'',807 &= -0,2512\,\delta x_2 + 0,0135\,h_1 - 0,0452 h_2 - 0,2334\,h_3\\ &\quad + 0,0065 p_1 + 0,0045 p_2 + 0,0052 p_3.\end{aligned}\right.$$

$$(h_2)\left\{\begin{aligned}-12,821 &= \ 0,8502\,\delta x_2 - 0,0452 h_1 + 0,1515 h_2 + 0,7890 h_3\\ &\quad - 0,0219 p_1 - 0,0160 p_2 - 0,0171\,p_3.\end{aligned}\right.$$

$$(h_3)\left\{\begin{aligned}-67'',149 &= 4,5120\,\delta x_2 - 0,2334\,h_1 + 0,7890\,h_2 + 4,1775\,h_3\\ &\quad - 0,1128\,p_1 - 0,0817\,p_2 - 0,0888\,p_3,\end{aligned}\right.$$

$$(p_2)\left\{\begin{aligned}1,327 &= -0,0878\,\delta x_2 + 0,0045\,h_1 - 0,0160\,h_2 - 0,0817\,h_3\\ &\quad + 0,0024\,p_1 + 0,0017\,p_2 + 0,0018\,p_3,\end{aligned}\right.$$

$$(p_3)\left\{\begin{aligned}1,448 &= -0,0955\,\delta x_2 + 0,0052\,h_1 - 0,0171\,h_2 - 0,0888\,h_3\\ &\quad + 0,0024\,p_1 + 0,0018\,p_2 + 0,0020\,p_3.\end{aligned}\right.$$

18. Semblablement, les équations du second groupe se trouvent être

$$(n)\left\{\begin{aligned}-171'',27 &= 77,0000\,\delta n + 9,3938\,\delta y_1 - 1,2183\,\delta y_2\\ &\quad + 8,8463\,k_1 + 7,3034\,k_2 - 0,5927\,k_3\\ &\quad + 5,7519\,q_1 + 4,8755\,q_2 + 9,5583\,q_3,\end{aligned}\right.$$

$$(y)\left\{\begin{aligned}-166,33 &= 93,9380\,\delta n + 12,7179\,\delta y_1 + 1,8907\,\delta y_2\\ &\quad + 11,2022\,k_1 + 11,0848\,k_2 + 2,6731\,k_3\\ &\quad + 7,0956\,q_1 + 5,9913\,q_2 + 12,7441\,q_3,\end{aligned}\right.$$

$$(k_1)\left\{\begin{aligned}-182,87 &= 88,4630\,\delta n + 11,2022\,\delta y_1 - 0,3210\,\delta y_2\\ &\quad + 10,2978\,k_1 + 9,0964\,k_2 + 0,4061\,k_3\\ &\quad + 6,6370\,q_1 + 5,6163\,q_2 + 11,3346\,q_3,\end{aligned}\right.$$

$$(k_2)\left\{\begin{aligned}-89,07 &= 73,0340\,\delta n + 11,0848\,\delta y_1 + 4,8266\,\delta y_2\\ &\quad + 9,0964\,k_1 + 10,7040\,k_2 + 5,4376\,k_3\\ &\quad + 5,5855\,q_1 + 4,6976\,q_2 + 10,9375\,q_3\end{aligned}\right.$$

$$(k_3)\left\{\begin{aligned}+124,80 &= -5,9270\,\delta n + 2,6731\,\delta y_1 + 10,4253\,\delta y_2\\ &\quad + 0,4061\,k_1 + 5,4376\,k_2 + 10,2929\,k_3\\ &\quad - 0,2497\,q_1 - 0,2643\,q_2 + 2,1788\,q_3\end{aligned}\right.$$

$$(q_2)\left\{\begin{aligned}-107,02 &= 48,7550\,\delta n + 5,9913\,\delta y_1 - 0,6614\,\delta y_2\\ &\quad + 5,6163\,k_1 + 4,6976\,k_2 - 0,2643\,k_3\\ &\quad + 3,6475\,q_1 + 3,0894\,q_2 + 6,0897\,q_3,\end{aligned}\right.$$

$$(q_3)\left\{\begin{aligned}-175,89 &= 95,5830\,\delta n + 12,7441\,\delta y_1 + 1,3845\,\delta y_2\\ &\quad + 11,3346\,k_1 + 10,9375\,k_2 + 2,1788\,k_3\\ &\quad + 7,2084\,q_1 + 6,0897\,q_2 + 12,7981\,q_3\end{aligned}\right.$$

19. Si, au moyen de (n), nous éliminons δn de chacune des autres équations, nous trouvons

$$(y)\left\{\begin{aligned} 42'',61 &= 1,2578\,\delta y_1 + 3,3771\,\delta y_2 + 0,4100 k_1 + 2,1748 k_2 \\ &\quad + 3,3962 k_3 + 0,0785 q_1 + 0,0433 q_2 + 1,0833 q_3. \end{aligned}\right.$$

$$(k_1)\left\{\begin{aligned} 13,90 &= 0,4100\,\delta y_1 + 1,0787\,\delta y_2 + 0,1346 k_1 + 0,7057 k_2 \\ &\quad + 1,0871 k_3 + 0,0288 q_1 + 0,0150 q_2 + 0,3534 q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_2)\left\{\begin{aligned} 73,38 &= 2,1748\,\delta y_1 + 5,9822\,\delta y_2 + 0,7057 k_1 + 3,7767 k_2 \\ &\quad + 5,9998 k_3 + 0,1298 q_1 + 0,0732 q_2 + 1,8715 q_3. \end{aligned}\right.$$

$$(k_3)\left\{\begin{aligned} 111,62 &= 3,3962\,\delta y_1 + 10,3315\,\delta y_2 + 1,0871 k_1 + 5,9998 k_2 \\ &\quad + 10,2473 k_3 + 0,1930 q_1 + 0,1110 q_2 + 2,9145 q_3. \end{aligned}\right.$$

$$(q_2)\left\{\begin{aligned} 1,42 &= 0,0433\,\delta y_1 + 0,1100\,\delta y_2 + 0,0150 k_1 + 0,0732 k_2 \\ &\quad + 0,1110 k_3 + 0,0055 q_1 + 0,0023 q_2 + 0,0375 q_3. \end{aligned}\right.$$

$$(q_3)\left\{\begin{aligned} 36,72 &= 1,0833\,\delta y_1 + 2,8969\,\delta y_2 + 0,3534 k_1 + 1,8715 k_2 \\ &\quad + 2,9145 k_3 + 0,0684 q_1 + 0,0375 q_2 + 0,9330 q_3 \end{aligned}\right.$$

20. Ensuite éliminons δy_1 au moyen de (y), et nous trouverons

$$(k_1)\left\{\begin{aligned} 0'',009 &= -0,0221\,\delta y_2 + 0,0010 k_1 - 0,0032 k_2 - 0,0200 k_3 \\ &\quad + 0,0032 q_1 + 0,0009 q_2 + 0,0003 q_3. \end{aligned}\right.$$

$$(k_2)\left\{\begin{aligned} -0,301 &= 0,1430\,\delta y_2 - 0,0032 k_1 + 0,0162 k_2 + 0,1274 k_3 \\ &\quad - 0,0059 q_1 - 0,0017 q_2 - 0,0016 q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_3)\left\{\begin{aligned} -3,443 &= 1,2129\,\delta y_2 - 0,0200 k_1 + 0,1274 k_2 + 1,0769 k_3 \\ &\quad - 0,0189 q_1 - 0,0059 q_2 - 0,0105 q_3. \end{aligned}\right.$$

$$(q_2)\left\{\begin{aligned} -0,045 &= -0,0062\,\delta y_2 + 0,0009 k_1 - 0,0017 k_2 - 0,0059 k_3 \\ &\quad + 0,0028 q_1 + 0,0008 q_2 + 0,0002 q_3. \end{aligned}\right.$$

$$(q_3)\left\{\begin{aligned} +0,017 &= -0,0116\,\delta y_2 + 0,0003 k_1 - 0,0016 k_2 - 0,0105 k_3 \\ &\quad + 0,0008 q_1 + 0,0002 q_2 + 0,0000 q_3. \end{aligned}\right.$$

21. Des équations qui restent dans les deux groupes, après l'élimination de $\delta\varepsilon$, δn, δx_1, δy_1, il sera facile, quand on aura obtenu des valeurs approximatives de la masse et de la longitude moyenne de la planète perturbatrice, de déduire les équations finales pour déterminer ces quantités avec plus de précision par la méthode des moindres carrés.

On peut remarquer toutefois que les équations, dans chaque groupe, sont, à très-peu de chose près, identiques entre elles; on peut donc poser deux équations finales par la simple addition des différentes équations de chaque groupe, en donnant partout le même signe aux quantités inconnues. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} 86'',552 &= -5,7967\,\delta x_2 + 0,3018\,h_1 - 1,0188\,h_2 - 5,3704\,h_3 \\ &\quad + 0,1460\,p_1 + 0,1056\,p_2 + 0,1149\,p_3 \\ 3,725 &= -1,3958\,\delta y_2 + 0,0254\,k_1 - 0,1501\,k_2 - 1,2407\,k_3 \\ &\quad + 0,0316\,q_1 + 0,0095\,q_2 + 0,0127\,q_3. \end{aligned}$$

22. Si, dans les expressions précédemment données pour δx_2 et δy_2, nous substituons $e = 0,046679$ et $\varepsilon - \varpi = 50°15',8$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta x_2 &= 0,007460\,\delta x_1 + 0,008974\,\delta y_1 \\ \delta y_2 &= -0,008974\,\delta x_1 + 0,007460\,\delta y_1. \end{aligned}$$

Si nous substituons ces valeurs dans les équations (x) et (y) et dans celles que nous venons de trouver, nous voyons qu'en ajoutant aux dernières équations

$$0,006768(x) + 0,040287(y)$$

et

$$-0,001869(x) + 0,008187(y) \text{ respectivement,}$$

δx_1 et δy_1 seront éliminés, et nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} 89'',641 &= 0,3252\,h_1 - 0,9637\,h_2 - 5,3297\,h_3 \\ &\quad + 0,0165\,k_1 + 0,0876\,k_2 + 0,1368\,k_3 \\ &\quad + 0,1539\,p_1 + 0,1111\,p_2 + 0,1559\,p_3 \\ &\quad + 0,0032\,q_1 + 0,0017\,q_2 + 0,0436\,q_3, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} 3,695 &= -0,0065\,h_1 - 0,0152\,h_2 - 0,0112\,h_3 \\ &\quad + 0,0288\,k_1 - 0,1323\,k_2 - 1,2129\,k_3 \\ &\quad - 0,0022\,p_1 - 0,0015\,p_2 - 0,0113\,p_3 \\ &\quad + 0,0323\,q_1 + 0,0099\,q_2 + 0,0215\,q_3. \end{aligned} \right.$$

23. Ces équations suffiraient pour déterminer la masse de la planète perturbatrice et sa longitude moyenne de l'époque, si nous négligions l'excentricité de l'orbite. Nous allons essayer maintenant d'établir, à l'aide des observations anciennes, des équations pour déterminer l'excentricité et la longitude du périhélie.

Voici les équations de condition fournies par les observations anciennes :

$$
\begin{aligned}
62'',6 = {} & \delta\varepsilon - 0,8776\,\delta x_1 + 0,5402\,\delta x_2 + 0,8712\,h_1 + 0,5180\,h_2 \\
& - 39,31\,\delta n - 0,4795\,\delta y_1 + 0,8415\,\delta y_2 - 0,4909\,k_1 + 0,8554\,k_2 \\
& + 0,0314\,h_3 - 0,9999\,p_1 - 0,8640\,p_2 - 0,5055\,p_3 \\
& + 0,9995\,k_3 + 0,0145\,q_1 - 0,5035\,q_2 - 0,8628\,q_3, \\
84,5 = {} & \delta\varepsilon + 0,4975\,\delta x_1 - 0,5050\,\delta x_2 + 0,0288\,h_1 - 0,9984\,h_2 \\
& - 32,30\,\delta n - 0,8675\,\delta y_1 - 0,8631\,\delta y_2 + 0,9996\,k_1 + 0,0573\,k_2 \\
& - 0,0860\,h_3 - 0,8534\,p_1 - 0,5456\,p_2 + 0,8220\,p_3 \\
& - 0,9963\,k_3 - 0,5213\,q_1 - 0,8380\,q_2 - 0,5695\,q_3, \\
67,2 = {} & \delta\varepsilon + 0,6732\,\delta x_1 - 0,0935\,\delta x_2 - 0,1120\,h_1 - 0,9749\,h_2 \\
& - 31,34\,\delta n - 0,7394\,\delta y_1 - 0,9956\,\delta y_2 + 0,9937\,k_1 - 0,2227\,k_2 \\
& + 0,3305\,h_3 - 0,8105\,p_1 - 0,4912\,p_2 + 0,9206\,p_3 \\
& - 0,9438\,k_3 - 0,5857\,q_1 - 0,8711\,q_2 - 0,3905\,q_3, \\
-51,8 = {} & \delta\varepsilon - 0,2616\,\delta x_1 - 0,8631\,\delta x_2 - 0,9649\,h_1 + 0,8618\,h_2 \\
& - 19,59\,\delta n + 0,9652\,dy_1 - 0,5050\,\delta y_2 - 0,2627\,k_1 + 0,5073\,k_2 \\
& - 0,6982\,h_3 - 0,0023\,p_1 + 0,2650\,p_2 - 0,5090\,p_3 \\
& - 0,7159\,k_3 - 1,0000\,q_1 - 0,9642\,q_2 + 0,8607\,q_3, \\
-43,2 = {} & \delta\varepsilon - 0,4741\,\delta x_1 - 0,5505\,\delta x_2 - 0,9154\,h_1 + 0,6758\,h_2 \\
& - 18,58\,\delta n + 0,8805\,\delta y_1 - 0,8348\,\delta y_2 - 0,4025\,k_1 + 0,7371\,k_2 \\
& - 0,3220\,h_3 + 0,0787\,p_1 + 0,3291\,p_2 - 0,6814\,p_3 \\
& - 0,9467\,k_3 - 0,9969\,q_1 - 0,9443\,q_2 + 0,7319\,q_3, \\
-50,1 = {} & \delta\varepsilon - 0,6430\,\delta x_1 - 0,1731\,\delta x_2 - 0,8543\,h_1 + 0,4599\,h_2 \\
& - 17,68\,\delta n + 0,7659\,\delta y_1 - 0,9849\,\delta y_2 - 0,5198\,k_1 + 0,8879\,k_2 \\
& + 0,0686\,h_3 + 0,1510\,p_1 + 0,3848\,p_2 - 0,8085\,p_3 \\
& - 0,9976\,k_3 - 0,9885\,q_1 - 0,9230\,q_2 + 0,5885\,q_3.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
-37'',8 = {} & \delta\varepsilon - 0,9492\,\delta x_1 + 0,8021\,\delta x_2 - 0,6189\,h_1 - 0,2340\,h_2 \\
& - 15,25\,\delta n + 0,3145\,\delta y_1 - 0,5972\,\delta y_2 - 0,7855\,k_1 + 0,9722\,k_2 \\
& + 0,9085\,h_3 + 0,3396\,p_1 + 0,5287\,p_2 - 0,9939\,p_3 \\
& - 0,4179\,k_3 - 0,9406\,q_1 - 0,8488\,q_2 + 0,1100\,q_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-20,5 = {} & \delta\varepsilon - 0,9985\,\delta x_1 + 0,9942\,\delta x_2 - 0,4128\,h_1 - 0,6591\,h_2 \\
& - 13,60\,\delta n - 0,0538\,\delta y_1 + 0,1074\,\delta y_2 - 0,9108\,k_1 + 0,7520\,k_2 \\
& + 0,9571\,h_3 + 0,4607\,p_1 + 0,6182\,p_2 - 0,9711\,p_3 \\
& + 0,2899\,k_3 - 0,8875\,q_1 - 0,7860\,q_2 - 0,2385\,q_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2,4 = {} & \delta\varepsilon - 0,9633\,\delta x_1 + 0,8560\,\delta x_2 - 0,2807\,h_1 - 0,8424\,h_2 \\
& - 12,64\,\delta n - 0,2684\,\delta y_1 + 0,5170\,\delta y_2 - 0,9598\,k_1 + 0,5388\,k_2 \\
& + 0,7536\,h_3 + 0,5279\,p_1 + 0,6670\,p_2 - 0,9023\,p_3 \\
& + 0,6574\,k_3 - 0,8493\,q_1 - 0,7451\,q_2 - 0,4310\,q_3.
\end{aligned}$$

24. Si de chacune de ces équations nous éliminons $\delta\varepsilon$, δn, δx_1 et δy_1, au moyen des équations (ε), (n), (x) et (y) trouvées précédemment, nous avons les suivantes :

$$\begin{aligned}
-142'',0 = {} & 1,7265\,\delta x_2 + 0,8412\,h_1 + 1,9521\,h_2 + 1,3230\,h_3 \\
& - 11,3691\,\delta y_2 + 3,6001\,k_1 - 2,8793\,k_2 - 10,9578\,k_3 \\
& - 1,6779\,p_1 - 1,6400\,p_2 + 0,2249\,p_3 \\
& + 2,6815\,q_1 + 1,8369\,q_2 + 0,2995\,q_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-105,2 = {} & - 0,4681\,\delta x_2 - 0,7311\,h_1 - 1,2776\,h_2 - 0,0609\,h_3 \\
& - 9,6249\,\delta y_2 + 3,7087\,k_1 - 2,1926\,k_2 - 9,5426\,k_3 \\
& - 1,7765\,p_1 - 1,4924\,p_2 + 0,2786\,p_3 \\
& + 1,6997\,q_1 + 1,1014\,q_2 + 0,7934\,q_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-126,1 = {} & - 0,2035\,dx_2 - 0,9653\,h_1 - 1,4730\,h_2 + 0,1937\,h_3 \\
& - 9,7719\,\delta y_2 + 3,5895\,k_1 - 2,5827\,k_2 - 9,5123\,k_3 \\
& - 1,7649\,p_1 - 1,4598\,p_2 + 0,2133\,p_3 \\
& + 1,5629\,q_1 + 1,0070\,q_2 + 0,8437\,q_3,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-199'',1 = -\ & 0,1917\,\delta x_2 - 1,3218\,h_1 + 1,5284\,h_2 + 0,0260\,h_3 \\
-\ & 9,8232\,\delta y_2 + 0,8943\,k_1 - 3,4359\,k_2 - 9,9270\,k_3 \\
& \qquad - 0,7901\,p_1 - 0,5885\,p_2 - 0,3497\,p_3 \\
& \qquad + 0,2540\,q_1 + 0,1607\,q_2 + 0,4028\,q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-174,7 = \ & 0,2985\,\delta x_2 - 1,1595\,h_1 + 1,6072\,h_2 + 0,5979\,h_3 \\
-\ & 9,5788\,\delta y_2 + 0,7062\,k_1 - 2,9425\,k_2 - 9,5877\,k_3 \\
& \qquad - 0,6712\,p_1 - 0,4970\,p_2 - 0,3251\,p_3 \\
& \qquad + 0,1946\,q_1 + 0,1238\,q_2 + 0,3277\,q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-166,7 = \ & 0,8191\,\delta x_2 - 1,0088\,h_1 + 1,6018\,h_2 + 1,1442\,h_3 \\
-\ & 9,1122\,\delta y_2 + 0,5586\,k_1 - 2,4890\,k_2 - 9,0258\,k_3 \\
& \qquad - 0,5688\,p_1 - 0,4203\,p_2 - 0,2956\,p_3 \\
& \qquad + 0,1498\,q_1 + 0,0958\,q_2 + 0,2658\,q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-114,2 = \ & 2,0482\,\delta x_2 - 0,6027\,h_1 + 1,2894\,h_2 + 2,2661\,h_3 \\
-\ & 6,6781\,\delta y_2 + 0,2576\,k_1 - 1,3421\,k_2 - 6,4080\,k_3 \\
& \qquad - 0,3256\,p_1 - 0,2384\,p_2 - 0,1971\,p_3 \\
& \qquad + 0,0628\,q_1 + 0,0419\,q_2 + 0,1298\,q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-72,4 = \ & 2,2815\,\delta x_2 - 0,3786\,h_1 + 0,9257\,h_2 + 2,3601\,h_3 \\
-\ & 4,4181\,\delta y_2 + 0,1283\,k_1 - 0,7339\,k_2 - 4,1495\,k_3 \\
& \qquad - 0,1957\,p_1 - 0,1428\,p_2 - 0,1286\,p_3 \\
& \qquad + 0,0283\,q_1 + 0,0198\,q_2 + 0,0671\,q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-42,0 = \ & 2,1139\,\delta x_2 - 0,2652\,h_1 + 0,6985\,h_2 + 2,1241\,h_3 \\
-\ & 3,1027\,\delta y_2 + 0,0772\,k_1 - 0,4646\,k_2 - 2,8790\,k_3 \\
& \qquad - 0,1348\,p_1 - 0,0984\,p_2 - 0,0924\,p_3 \\
& \qquad + 0,0154\,q_1 + 0,0114\,q_2 + 0,0412\,q_3.
\end{aligned}
$$

25. Les plus grands termes dépendant de l'excentricité de la planète perturbatrice se rencontrent dans p_3, q_3; il conviendra donc de combiner les équations précitées, de telle sorte que ces quantités puissent acquérir les plus forts coefficients possibles; à cet effet, on multipliera chaque équation par une quantité presque proportionnelle au coefficient de chacune des quantités inconnues p_3 et q_3, et l'on additionnera ensemble les différents résultats. On n'a pas cru devoir employer la première des équations précitées, attendu qu'elle provient d'une seule observation faite par Flamsteed, en 1690, vingt-deux ans avant toute autre observation.

Ainsi l'équation qui doit faire connaître p_3 peut être formée en multipliant les équations précitées, à partir de la seconde, par

$$-0,8,\quad -0,6,\quad +1,0,\quad +1,0,\quad +0,9,\quad +0,6,\quad +0,4,\quad +0,3,$$

et l'équation pour trouver q_3 en multipliant les mêmes équations par

$$1,0,\quad 1,0,\quad 0,5,\quad 0,4,\quad 0,3,\quad 0,2,\quad 0,1,\quad 0,1.$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
-474'',1 = {} & 4,114\,\delta x_2 - 2,817h_1 + 7,837h_2 + 4,528h_3 \\
& -20,745\,\delta y_2 - 2,789k_1 - 6,551k_2 - 20,666k_3 \\
& + 0,193p_1 + 0,377p_2 - 1,489p_3 \\
& - 1,660q_1 - 1,078q_2 - 0,054q_3, \\
-485,0 = {} & 0,446\,\delta x_2 - 3,308h_1 - 0,442h_2 + 1,629h_3 \\
& -32,961\,\delta y_2 + 8,267k_1 - 8,805k_2 - 32,546k_3 \\
& - 4,473p_1 - 3,643p_2 + 0,037p_3 \\
& + 3,530q_1 + 2,278q_2 + 2,086q_3.
\end{aligned}$$

26. Si nous éliminons δx_2 et δy_2 de ces équations au moyen de (x) et (y), nous aurons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
-476'',7 = {} & - 2,930h_1 + 7,572h_2 + 4,332h_3 \\
& - 2,751k_1 - 6,348k_2 - 20,350k_3 \\
& + 0,155p_1 + 0,350p_2 - 1,686p_3 \\
& - 1,653q_1 - 1,074q_2 + 0,047q_3,
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
-485,9 = {} & - 3,463h_1 - 0,805h_2 + 1,360h_3 \\
& + 8,345k_1 - 8,391k_2 - 31,900k_3 \\
& - 4,525p_1 - 3,679p_2 - 0,233p_3 \\
& + 3,545q_1 + 2,286q_2 + 2,292q_3.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations, avec (1) et (2) de l'article **25**, suffiront pour la solution de notre problème.

27. Si nous éliminons les membres de gauche des équations (2), (3) et (4) au moyen de l'équation (1), nous aurons

$$\begin{aligned}
o = {} & 0{,}4819\,h_1 - 0{,}5950\,h_2 - 5{,}0570\,h_3 + 0{,}2063\,p_1 + 0{,}1475\,p_2 + 0{,}4300\,p_3 \\
& - 0{,}6812\,k_1 + 3{,}2982\,k_2 + 29{,}5618\,k_3 - 0{,}7804\,q_1 - 0{,}2375\,q_2 - 0{,}4789\,q_3, \\
o = {} & -1{,}2005\,h_1 + 2{,}4466\,h_2 - 24{,}0122\,h_3 + 0{,}9735\,p_1 + 0{,}9412\,p_2 - 0{,}8575\,p_3 \\
& - 2{,}6633\,k_1 - 5{,}8825\,k_2 - 19{,}6219\,k_3 - 1{,}6362\,q_1 - 1{,}0648\,q_2 + 0{,}2791\,q_3, \\
o = {} & -1{,}7003\,h_1 - 6{,}0294\,h_2 - 27{,}5295\,h_3 - 3{,}6908\,p_1 - 3{,}0772\,p_2 + 0{,}6118\,p_3 \\
& + 8{,}4344\,k_1 - 7{,}9162\,k_2 - 31{,}1583\,k_3 + 3{,}5621\,q_1 + 2{,}2954\,q_2 + 2{,}5285\,q_3.
\end{aligned}$$

28. Si maintenant on fait $\varepsilon - \varepsilon' = \theta$ et $\varepsilon - \varpi = \beta$, on voit aisément que

$$\begin{aligned}
\frac{h_1}{m'} &= -36'',99 \sin\theta, \quad \frac{h_2}{m'} = 58'',97 \sin 2\theta, \\
\frac{k_1}{m'} &= -36'',99 \cos\theta, \quad \frac{k_2}{m'} = 58'',97 \cos 2\theta, \\
\frac{h_3}{m'} &= 5'',80 \sin 3\theta + 0{,}007460\,\frac{p_3}{m'} + 0{,}008974\,\frac{q_3}{m'}, \\
\frac{k_3}{m'} &= 5'',80 \cos 3\theta - 0{,}008974\,\frac{p_3}{m'} + 0{,}007460\,\frac{q_3}{m'} \\
\frac{p_1}{m'} &= 0'',18 \sin(\theta - \beta) - 0{,}046247\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) \\
\frac{q_1}{m'} &= -0'',18 \cos(\theta - \beta) + 0{,}046247\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right) \\
\frac{p_2}{m'} &= 24'',91 \sin(2\theta - \beta) + 0{,}13055\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) \\
\frac{q_2}{m'} &= 24'',91 \cos(2\theta - \beta) + 0{,}13055\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right).
\end{aligned}$$

29. En substituant ces expressions dans les équations de l'article **27** et en remplaçant β par sa valeur $50^\circ\,15',8$, nous obtiendrons, après une légère réduction,

$$
\begin{aligned}
0 = &-(1,24782)\sin\theta + (1,40248)\cos\theta - (1,57155)\sin 2\theta + (2,27388)\cos 2\theta \\
&-(1,46746)\sin 3\theta + (2,23430)\cos 3\theta + (9,10380)\frac{p_3}{m'} - (9,48254)\frac{q_3}{m'} \\
&+(8,28455)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) - (8,49138)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&-(7,97958)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) - (8,55742)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right), \\
0 = &\ (1,65083)\sin\theta + (1,99378)\cos\theta + (2,14259)\sin 2\theta - (2,58192)\cos 2\theta \\
&-(2,14400)\sin 3\theta - (2,05631)\cos 3\theta - (9,93475)\frac{p_3}{m'} - (8,91803)\frac{q_3}{m'} \\
&+(9,08947)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) - (9,14306)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&-(8,65341)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) - (8,87892)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right), \\
0 = &\ (1,79213)\sin\theta - (2,49403)\cos\theta - (2,55700)\sin 2\theta - (2,56972)\cos 2\theta \\
&-(2,20337)\sin 3\theta - (2,25714)\cos 3\theta + (9,83632)\frac{p_3}{m'} + (0,31156)\frac{q_3}{m'} \\
&-(9,60395)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) + (9,47665)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&+(9,23220)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) + (9,21679)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right);
\end{aligned}
$$

formules dans lesquelles les nombres compris entre parenthèses indiquent les logarithmes des coefficients correspondants.

30. On peut résoudre rapidement ces équations par approximation. Les coefficients de $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$ dans la première équation étant faibles, nous pouvons en déduire une valeur approximative de θ dont la substitution dans la deuxième et la troisième équation donnera les valeurs approximatives de $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$. Au moyen de celles-ci, on pourra trouver une valeur plus exacte de θ de la première équation, et, en répétant ce procédé, nous pourrons résoudre toutes les équations avec autant de précision que nous le désirons.

Ainsi nous trouvons

$$\vartheta = -51^\circ 30', \quad \frac{p_3}{m'} = 271'',57, \quad \frac{q_3}{m'} = -207'',24.$$

ε est connu et égal à $217^\circ 55'$: donc $\varepsilon' = 269^\circ 25'$, qui est la valeur de la longitude moyenne de la planète perturbatrice à l'époque 1810, 328. Le mouvement sidéral en 36 périodes synodiques d'Uranus est égal à $55^\circ 12'$; la précession est égale à $30'$: donc la longitude moyenne en 1846, 762, c'est-à-dire 1846, le 6 octobre, est égale à $325^\circ 7'$.

De plus les expressions analytiques pour $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$ sont

$$\frac{p_3}{m'} = 48'',55 \sin(3\vartheta - \beta) - 93'',01 e' \sin(3\vartheta - \beta')$$

$$\frac{q_3}{m'} = 48'',55 \cos(3\vartheta - \beta) - 93'',01 e' \cos(3\vartheta - \beta'),$$

où $\varepsilon - \varpi' = \beta'$. En les égalant aux valeurs numériques données plus haut, nous trouvons $e' = 3,2206$, $\beta' = 262^\circ 28'$, et, par conséquent, $\varpi' = 315^\circ 27'$. On déduit de là que la longitude du périhélie en 1846 est $315^\circ 57'$.

Finalement, en substituant les valeurs que nous venons d'obtenir dans l'équation (1), nous trouvons $m' = 0,82816$.

31. Voici, en conséquence, les valeurs de la masse et les éléments de l'orbite de la planète perturbatrice, résultant de la première hypothèse relative à la distance moyenne :

$$\frac{a}{a'} = 0,5.$$

Longitude moyenne de la planète, le 6 octobre 1846. . .	$325^\circ 7'$
Longitude du périhélie.	$315^\circ 57'$
Excentricité de l'orbite.	0,16103
Masse (celle du Soleil étant prise pour unité).	0,0001656

Tels sont les résultats que je communiquai à l'Astronome royal, en octobre 1845.

32. Immédiatement après, j'entrepris une recherche analogue en partant de l'hypothèse que la distance moyenne était moindre de $\frac{1}{30}$ que celle que j'avais admise auparavant, c'est-à-dire que $\frac{a}{a'}$ ou $\alpha = \sin 31° = 0{,}515$. La méthode employée fut, en principe, exactement celle que j'avais d'abord suivie; mais les calculs numériques furent quelque peu abrégés par de légères modifications de procédés, que ma solution antérieure m'avait suggérées.

33. Si donc nous admettons que $\alpha = \sin 31°$, les valeurs des quantités b, $\alpha \frac{db}{d\alpha}$, $\alpha^2 \frac{d^2 b}{da^2}$ deviendront

$$\log b_0 = 0{,}33385, \quad \log \alpha \frac{db_0}{d\alpha} = 9{,}57333, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_0}{d\alpha^2} = 9{,}82911,$$
$$\log b_1 = 9{,}76106, \quad \log \alpha \frac{db_1}{d\alpha} = 9{,}86149, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_1}{d\alpha^2} = 9{,}76573,$$
$$\log b_2 = 9{,}35361, \quad \log \alpha \frac{db_2}{d\alpha} = 9{,}71359, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_2}{d\alpha^2} = 9{,}92466,$$
$$\log b_3 = 8{,}98918, \quad \log \alpha \frac{db_3}{d\alpha} = 9{,}50854, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_3}{d\alpha^2} = 9{,}91563.$$

En conséquence, au moyen des formules données plus haut, les principales inégalités de la longitude moyenne d'Uranus, produites par l'action d'une planète dont la masse est $\frac{m'}{5000}$, celle du Soleil étant prise pour unité, l'excentricité de son orbite étant $\frac{e'}{20}$, peuvent être trouvées comme suit :

$$\begin{array}{ll}
-\ 42'',33\, m' & \sin\ (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'), \\
+\ 76,55\, m' & \sin 2(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'), \\
+\ \ 7,25\, m' & \sin 3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'), \\
+\ \ 2,34\, m' & \sin\ (n't + \varepsilon' - \varpi), \\
-\ \ 4,74\, m'e' & \sin\ (n't + \varepsilon' - \varpi'), \\
+\ 41,72\, m' & \sin\ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi), \\
-\ 16,47\, m'e' & \sin\ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi'), \\
+\ 33,93\, m' & \sin\ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi), \\
-\ 63,41\, m'e' & \sin\ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi').
\end{array}$$

Nous pouvons y ajouter les suivantes, qui sont de deux dimensions par rapport aux excentricités,

$$
\begin{aligned}
&+ 0'',40 m' \sin 3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'),\\
&- 0,74 m'e' \sin[3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') - \varpi + \varpi'].
\end{aligned}
$$

34. Maintenant, d'après notre hypothèse, $n = 13°0',6$, $n' = 4°48',5$, $n - n' = 8°12'.1$, $n - 2n' = 3°23',6$, $2n - 3n' = 11°35',7$.

Donc les équations de condition données par les observations modernes auront la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
c'' = {}& \qquad \partial\varepsilon + \partial x_1 \cos(13°.\,0',5)t + \partial x_2 \cos(26°.\,1',0)t,\\
&+ t\,\partial n + \partial y_1 \sin(13.\,0,5)t + \partial y_2 \sin(26.\,1,0)t,\\
&\qquad + h_1 \cos(8.12,1)t + h_2 \cos(16.24,2)t + h_3 \cos(24°.36',3)t\\
&\qquad + k_1 \sin(8.12,1)t + k_2 \sin(16.24,2)t + k_3 \sin(24.36.3)t\\
&\qquad + p_1 \cos(4.48,5)t + p_2 \cos(3.23,6)t + p_3 \cos(11.35,7)t\\
&\qquad + q_1 \sin(4.48,5)t + q_2 \sin(3.23,6)t + q_3 \sin(11.35,7)t.
\end{aligned}
$$

35. Si nous traitons ces équations de condition d'après la méthode employée plus haut, les équations du premier groupe qui en dérivent se trouveront être comme suit :

$$
(\varepsilon)\quad \left\{
\begin{aligned}
151,48 = {}& 21,0000\,\partial\varepsilon + 6,0670\,\partial x_1 - 4,4358\,\partial x_2\\
&+ 13,9515\,h_1 + 0,9471\,h_2 - 4,5965\,h_3\\
&+ 18,3916\,p_1 + 19,6752\,p_2 + 8,4184\,p_3,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(x)\quad \left\{
\begin{aligned}
246,48 = {}& 6,0670\,\partial\varepsilon + 8,2821\,\partial x_1 + 4,1762\,\partial x_2\\
&+ 7,3540\,h_1 + 8,3027\,h_2 + 5,0961\,h_3\\
&+ 6,5793\,p_1 + 6,3319\,p_2 + 8,0850\,p_3,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(h_1)\quad \left\{
\begin{aligned}
207,58 = {}& 13,9515\,\partial\varepsilon + 7,3540\,\partial x_1 - 0,4177\,\partial x_2\\
&+ 10,9735\,h_1 + 4,6775\,h_2 - 0,0005\,h_3\\
&+ 12,8697\,p_1 + 13,4050\,p_2 + 8,4781\,p_3,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(h_2)\quad \left\{
\begin{aligned}
245,17 = {}& 0,9471\,\partial\varepsilon + 8,3027\,\partial x_1 + 7,2362\,\partial x_2\\
&+ 4,6775\,h_1 + 10,0259\,h_2 + 8,3220\,h_3\\
&+ 2,3661\,p_1 + 1,6727\,p_2 + 7,3073\,p_3,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(h_3)\quad \left\{
\begin{aligned}
103,48 = {}& - 4,5965\,\partial\varepsilon + 5,0961\,\partial x_1 + 10,5558\,\partial x_2\\
&- 0,0005\,h_1 + 8,3220\,h_2 + 10,9749\,h_3\\
&- 2,8935\,p_1 + 3,7316\,p_2 + 3,5852\,p_3.
\end{aligned}
\right.
$$

56. De même les équations du second groupe seront

$$(n)\quad \left\{\begin{aligned} -171,27 = {}& 77,0000\,\delta n + 9,3938\,\delta y_1 - 1,2183\,\delta y_2 \\ & + 8,7355\,k_1 + 7,6213\,k_2 - 0,0590\,k_3 \\ & + 5,9764\,q_1 + 4,3875\,q_2 + 9,6152\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(y)\quad \left\{\begin{aligned} -166,33 = {}& 93,9380\,\delta n + 12,7179\,\delta y_1 + 1,8907\,\delta y_2 \\ & + 11,0393\,k_1 + 11,3717\,k_2 + 3,3196\,k_3 \\ & + 7,3747\,q_1 + 5,3825\,q_2 + 12,6816\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_1)\quad \left\{\begin{aligned} -181,31 = {}& 87,3550\,\delta n + 11,0393\,\delta y_1 - 0,3758\,\delta y_2 \\ & + 10,0264\,k_1 + 9,2740\,k_2 + 0,9476\,k_3 \\ & + 6,8054\,q_1 + 4,9866\,q_2 + 11,1971\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_2)\quad \left\{\begin{aligned} -99,51 = {}& 76,2130\,\delta n + 11,3717\,\delta y_1 + 4,4810\,\delta y_2 \\ & + 9,2740\,k_1 + 10,9740\,k_2 + 5,6294\,k_3 \\ & + 6,0523\,q_1 + 4,3916\,q_2 + 11,0843\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_3)\quad \left\{\begin{aligned} 113,14 = {}& -0,5900\,\delta n + 3,3196\,\delta y_1 + 10,2112\,\delta y_2 \\ & + 0,9476\,k_1 + 5,6294\,k_2 + 10,0251\,k_3 \\ & + 0,1746\,q_1 + 0,0454\,q_2 + 2,4791\,q_3. \end{aligned}\right.$$

57. Les équations (p_2) et (p_3) du premier groupe, et (q_2), (q_3) du deuxième n'ont pas été formées, notre solution antérieure ayant montré que, après l'élimination de $\delta\varepsilon$, δn, δx_1, dy_1, les coefficients des quantités inconnues restant dans ces équations seraient extrêmement faibles. Il sera avantageux de combiner entre elles les équations (h_1), (h_2) et (h_3) et aussi les équations (k_1), (k_2) et (k_3) et d'en éliminer $\delta\varepsilon$, δn, δx_1 et δy_1 après que cette combinaison aura été effectuée. Si ensuite nous changeons le signe de la troisième équation dans chaque groupe et que nous l'ajoutions à la quatrième et à la cinquième, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} 141,07 = {}& -17,6009\,\delta\varepsilon + 6,0448\,\delta x_1 + 18,2097\,\delta x_2 \\ & - 6,2965\,h_1 + 13,6704\,h_2 + 19,2974\,h_3 \\ & - 13,3971\,p_1 - 15,4639\,p_2 + 2,4144\,p_3, \\ 194,94 = {}& -11,7320\,\delta n + 3,6520\,\delta y_1 + 15,0680\,\delta y_2 \\ & + 0,1951\,k_1 + 7,3294\,k_2 + 14,7069\,k_3 \\ & - 0,5785\,q_1 - 0,5496\,q_2 + 2,3663\,q_3. \end{aligned}$$

38. Au moyen de (ε) et (n) des n^{os} **35** et **36**, éliminons $\delta\varepsilon$ et δn de (x) et (y), ainsi que des équations que nous venons de trouver, et nous aurons

$$(x)\left\{\begin{array}{l} 202'',72 = 6,5294\,\delta x_1 + 5,4577\,\delta x_2 + 3,3234\,h_1 + 8,0291\,h_2 \\ \qquad + 6,4240\,h_3 + 1,2659\,p_1 + 0,6477\,p_2 + 5,6529\,p_3, \end{array}\right.$$

$$(y)\left\{\begin{array}{l} 42'',61 = 1,2578\,\delta y_1 + 3,3771\,\delta y_2 + 0,3822\,k_1 + 2,0739\,k_2 \\ \qquad + 3,3916\,k_3 + 0,0836\,q_1 + 0,0298\,q_2 + 0,9513\,q_3, \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} 268,02 = 11,1297\,\delta x_1 + 14,4919\,\delta x_2 + 5,3967\,h_1 + 14,4642\,h_2 \\ \qquad + 15,4449\,h_3 + 2,0175\,p_1 + 1,0266\,p_2 + 9,4702\,p_3, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 168,85 = 5,0833\,\delta y_1 + 14,8824\,\delta y_2 + 1,5261\,k_1 + 8,4906\,k_2 \\ \qquad + 14,6979\,k_3 + 0,3320\,q_1 + 0,1189\,q_2 + 3,8313\,q_3. \end{array}$$

(*A suivre.*)

Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre;

Par M. Émile MATHIEU.

L'étude du mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité peut se partager en deux parties. On peut en effet examiner le mouvement absolu de l'axe de rotation de la Terre dans l'espace, c'est-à-dire son déplacement par rapport à la sphère céleste, et l'on obtient ainsi les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre. Cette question a été traitée avec toute l'approximation désirable par M. Serret (*Annales de l'Observatoire*, t. V, 1859), et elle n'est point examinée dans ce travail. En second lieu on peut rechercher le mouvement de cet axe de rotation par rapport à la Terre ou le déplacement des pôles à sa surface, et déterminer la vitesse de rotation autour de cet axe. Cette question m'a semblé susceptible de nouvelles recherches, et c'est à son examen que se rapporte ce Mémoire.

Les formules de perturbation du mouvement de rotation d'un corps solide, qui n'est sollicité que par des forces perturbatrices, sont exactement les mêmes que les formules de perturbation du mouvement d'une planète. J'ai expliqué dans un autre Mémoire d'où provient cette coïncidence (*Journal de Mathématiques*, 1875, p. 183), et j'y ai donné le théorème général sur lequel elle repose. Il suit de là que les deux principaux problèmes que l'on rencontre dans la Mécanique céleste, à savoir la recherche du mouvement de translation des planètes et de leurs satellites et celle de leur mouvement de rotation autour de leurs centres de gravité, peuvent être étudiés au moyen des mêmes formules. Poisson rappelle cette propriété remarquable dans la préface de son *Mémoire sur la rotation de la Terre autour de son centre de gravité* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII, 1827), et cependant il préfère, pour faire ses calculs, substituer à ces formules un système d'autres formules assez différent [*].

La démonstration que je donne de l'invariabilité du jour sidéral, et qui est fondée sur le théorème général dont j'ai parlé, est entièrement différente de celle de Poisson; mais les deux démonstrations ne se séparent pas seulement par la forme, car Poisson, pour simplifier ses calculs, fait une supposition qu'il regarde comme suffisamment approchée et qui n'est pas admissible. Elle consiste à regarder les orbites du Soleil et de la Lune, qui troublent le mouvement de rotation de la Terre, comme circulaires et situées dans un même plan. Or je montre que cette recherche exige trop de précision pour que l'on puisse faire cette simplification.

On reconnaîtra sans peine que mon analyse pourrait être beaucoup simplifiée par chacune des deux hypothèses suivantes :

1° Si l'on supposait que la Terre est exactement de révolution;

2° Si l'on pouvait considérer les orbites du Soleil et de la Lune comme circulaires et situées dans le même plan.

La seconde supposition, comme je l'ai dit, ne peut être admise. Pour la première hypothèse, on doit penser qu'elle approche beaucoup de la réalité si l'on se reporte à l'origine fluide de la Terre. Cependant il y a aussi utilité à ne pas la faire *a priori*, d'abord parce que la quantité $\frac{B-A}{B}$, où A et B désignent les plus petits moments principaux d'inertie par rapport au centre de gravité, joue un rôle important dans cette théorie, tant qu'on ne la suppose pas excessivement petite, et ensuite afin de faire servir à la détermination de cette quantité la comparaison des résultats de l'analyse aux observations.

En effet il semble résulter des observations du pendule que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est notablement plus petit que le nombre qui représente l'aplatissement de la Terre. Cependant, à cause des nombreuses irrégularités de la surface du globe terrestre, la démonstration de la peti-

[*] Poisson s'était occupé auparavant de la démonstration de la constance du jour sidéral (*Journal de l'École Polytechnique*, t. VIII, p. 198); mais cette démonstration est très-inférieure à celle qu'il a donnée plus tard.

tesse de $\frac{B-A}{B}$ à l'aide du pendule exigerait un très-grand nombre d'observations faites en plusieurs points de divers méridiens, qu'il faudrait ensuite soumettre au calcul; mais la véritable méthode pour calculer cette quantité réside dans la théorie actuelle, et je démontre que, si l'on admet que la latitude d'un lieu de la Terre ne peut varier de deux secondes dans un espace de temps d'environ 153 jours, il en résulte que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est plus petit que $\frac{1}{3000000}$, et par suite plus petit que $\frac{1}{10000}$ de l'aplatissement.

Rappel des formules relatives au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

1. Supposons un corps qui tourne autour d'un point fixe. Désignons par A, B, C les grandeurs des moments principaux d'inertie du corps autour de ce point. Prenons pour axes des coordonnées rectangulaires des x_1, y_1, z_1 respectivement les trois axes principaux d'inertie A, B, C, et désignons sous le nom d'*équateur* le plan qui passe par ces deux premiers axes. Imaginons un second système d'axes rectangulaires des x, y, z qui soit fixe et qui ait la même origine. Désignons : 1° par ψ l'angle compris entre l'axe des x et la trace du plan des x_1, y_1 sur le plan des x, y; 2° par φ l'angle de cette trace et de l'axe des x_1; 3° par θ l'inclinaison du plan des x_1, y_1 sur le plan des x, y.

Si le corps n'est sollicité par aucune force, il existe pour son mouvement un plan du maximum des aires, qui est invariable de position. Imaginons que le plan ci-dessus des x, y coïncide avec le plan invariable, et désignons par ψ_1, φ_1, θ_1 les mêmes angles relativement au plan invariable que ψ, φ, θ pour le plan des x, y. Toutefois il importe de définir les trois angles φ_1, θ_1, ψ_1 avec plus de précision, ainsi que nous allons le faire.

Imaginons une sphère dont le centre soit à l'origine des coordonnées, et examinons le triangle sphérique déterminé sur sa surface par le plan fixe des x, y, par le plan invariable et par le plan de l'équateur. L'angle ψ représente la longitude de la trace de l'équateur sur le grand cercle déterminé par le plan des x, y; désignons par α la longitude du nœud du plan invariable sur le même plan, de sorte qu'un des côtés du triangle sphérique est égal à $\psi - \alpha$. Les angles φ_1 et φ représentent ceux que fait l'axe principal A avec l'intersection du plan de l'équateur par le plan invariable et par le plan des x, y; donc $\varphi_1 - \varphi$ est le côté du triangle sphérique situé sur l'équateur. Enfin, en convenant de compter l'angle ψ_1 à partir du nœud du plan invariable, nous pouvons prendre pour ψ_1 le côté du triangle sphérique situé sur ce plan. Désignons aussi par γ l'inclinaison du plan invariable sur le plan fixe; alors γ, θ_1, $\pi - \theta$ seront respectivement les trois angles opposés dans le triangle aux trois côtés $\varphi_1 - \varphi$, $\psi - \alpha$, ψ_1. Donc, d'après les formules de la Trigonométrie, nous aurons

$$
\text{(A)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1\cos\psi_1,\\
&\sin(\varphi_1 - \varphi)\sin\theta = \sin\psi_1\sin\gamma,\\
&\sin(\psi - \alpha)\sin\theta = \sin\psi_1\sin\theta_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces trois formules nous permettront de calculer φ, θ, ψ, quand nous aurons déterminé φ_1, θ_1, ψ_1.

Soit ω la grandeur de la vitesse de la rotation instantanée du corps, et soient p, q, r ses trois composantes suivant les trois axes principaux d'inertie A, B, C. Le principe des forces vives donne l'équation.

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = 2h,$$

où h est une constante, et le théorème des aires pris relativement au plan invariable fournit cette autre équation

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2,$$

dont nous désignerons la constante k sous le nom d'*axe du plan invariable*. En le supposant porté sur une normale à ce plan et le projetant sur les axes principaux, on obtient les formules

$$\text{(B)} \qquad Ap = k\sin\theta_1\sin\varphi_1, \quad Bq = k\sin\theta_1\cos\varphi_1, \quad Cr = k\cos\theta_1.$$

Enfin nous rappellerons les deux formules suivantes, que l'on trouve dans tous les Traités de Mécanique :

$$(C) \qquad dt = \frac{C\sqrt{AB}\,dr}{\sqrt{-k^2 + 2Bh + C(C-B)r^2}\,\sqrt{k^2 - 2Ah - C(C-A)r^2}},$$

$$(D) \qquad d\psi_1 = \frac{k(2h - Cr^2)}{k^2 - C^2r^2}\,dt.$$

A l'aide de ces deux formules, on peut calculer r et ψ_1 en fonction de t, et l'on aura ensuite facilement toutes les autres inconnues par les formules qui précèdent.

Sur le calcul du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

2. Cherchons à appliquer les formules précédentes au globe terrestre, en plaçant l'origine des coordonnées à son centre de gravité. Désignons par C le plus grand des trois moments principaux d'inertie en ce point, par B le moyen et par A le plus petit. Comme on ne peut douter que la Terre soit à très-peu près de révolution, les deux quantités B et A ne peuvent différer que d'une quantité très-petite.

Les formules du numéro précédent ne sont pas immédiatement applicables au mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité; car, la Terre n'étant pas composée de couches homogènes exactement concentriques, elle est sollicitée dans ce mouvement par l'action perturbatrice du Soleil et de la Lune. Cependant les équations qui donnent φ_1, θ_1, ψ_1, φ, θ, ψ pourront toutes être conservées, pourvu que l'on regarde les constantes arbitraires comme des quantités variables données par les formules de perturbation. Les quantités φ_1, θ_1, ψ_1 conserveront la même signification que ci-dessus; seulement le plan invariable sera supposé mobile, mais il restera constamment le plan du maximum des aires décrites par les projections des rayons vecteurs, menés du centre de gravité à toutes les molécules du globe.

Désignons par β le second membre de l'équation des aires prise par rapport au plan des x, y dans le mouvement non troublé. Désignons par τ la constante qui s'ajoute au temps t et désignons par g la valeur de ψ_1 quand t est égal à $-\tau$; g représentera aussi la distance angulaire, à la ligne des nœuds, d'un point du plan invariable qui ne se mouvra dans ce plan qu'en vertu de la perturbation. Les six constantes arbitraires h, k, β, τ, g, α, devenues variables, satisfont aux six équations différentielles canoniques suivantes :

$$\text{(E)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d\Omega}{d\tau}, & \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{d\Omega}{dh}, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d\Omega}{d\beta}, & \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{d\Omega}{d\alpha}, \\ \frac{dk}{dt} &= \frac{d\Omega}{dg}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{d\Omega}{dk}, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles Ω désigne la fonction perturbatrice. (*Voir* mon *Mémoire sur des formules de perturbation, Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 183.)

Pour calculer la vitesse de rotation de la Terre, il suffira d'examiner les trois quantités p, q, r qui représentent ces composantes suivant les axes principaux d'inertie. D'après les formules (B), on a

$$p = \frac{k \sin\theta_1 \sin\varphi_1}{A}, \qquad q = \frac{k \sin\theta_1 \cos\varphi_1}{B};$$

$\sin\theta_1$ peut être calculé en fonction de t et des éléments troublés $h, k, \ldots$, et il suffira de prouver que θ_1 n'aura jamais que des valeurs insensibles, pour qu'il en soit de même des valeurs de p et q. Ensuite, de l'équation $Cr = k\cos\theta_1$, on tirera, parce que θ_1 est très-petit,

$$r = \frac{1}{C} k \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right),$$

et, si l'on prouve de plus que k ne peut subir que des variations insensibles, la même chose aura lieu pour r.

La précession et la nutation seraient déterminées par le calcul des angles α et γ; α est donné par la troisième formule (E), et l'angle γ se déduirait de la quatrième et de la cinquième formule (E), puisque l'on a $\beta = k\cos\gamma$. Mais nous n'avons pas à nous occuper de cette détermination dans ce Mémoire.

Examen des valeurs des angles θ_1, φ_1, ψ_1, quand l'angle θ_1 reste toujours très-petit.

5. Examinons comment on peut simplifier les formules qui donnent les angles φ_1, θ_1, ψ_1, quand l'angle θ_1 est très-petit. C'est ce qui a lieu pour le globe terrestre; car son axe de rotation ne s'écarte de l'axe du plus grand moment d'inertie que d'une quantité qui n'a pu jusqu'à présent être reconnue par les observations, et, comme le sinus de cet écart est égal à

$$\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = C\theta_1 \sqrt{\frac{\sin^2\varphi_1}{A^2}+\frac{\cos^2\varphi_1}{B^2}},$$

en négligeant le cube de θ_1 il faut en conclure que θ_1 est très-petit.

Portons les expressions (B) du n° 1 dans l'équation du principe des forces vives, et nous aurons la formule

$$(1)\quad 2h - k^2\left(\frac{1}{A}\sin^2\varphi_1 + \frac{1}{B}\cos^2\varphi_1\right) = k^2\cos^2\theta_1\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\sin^2\varphi_1 - \frac{1}{B}\cos^2\varphi_1\right),$$

qui établit une relation entre φ_1 et θ_1. Dans la formule (C) mettons $k\cos\theta_1$ au lieu de Cr, et nous aurons

$$dt = \frac{C\sqrt{AB}\,k\sin\theta_1\,d\theta_1}{\sqrt{(2hC-k^2)B - k^2(C-B)\sin^2\theta_1}\sqrt{k^2(C-A)\sin^2\theta_1 - (2hC-k^2)A}}.$$

De l'équation des forces vives et de celle des aires on déduit

$$2h - \frac{k^2}{C} = A\frac{C-A}{C}p^2 + B\frac{C-B}{C}q^2,$$

ce qui prouve que la quantité du premier membre est très-petite et positive, puisque C est plus grand que A et B. D'après cela, il faut, pour que l'expression de dt soit réelle, que l'on ait

$$\sin^2\theta_1 < \frac{(2hC-k^2)B}{k^2(C-B)},\quad \sin^2\theta_1 > \frac{(2hC-k^2)A}{k^2(C-A)},$$

et, par conséquent, θ_1 oscille entre les deux valeurs indiquées par ces deux inégalités; dans le cas particulier où B est égal à A, on a

$$\sin^2\theta_1 = \frac{(2hC - k^2)A}{k^2(C - A)},$$

et l'angle θ_1 reste invariable dans le mouvement non troublé.

De la formule (D) du n° 1 on déduit aussi

$$d\psi_1 = \frac{2hC - k^2 + k^2\sin^2\theta_1}{k^2\sin^2\theta_1}dt.$$

Supposons maintenant θ_1 très-petit; en remplaçant $\sin\theta_1$ par θ_1, nous aurons

$$(2)\quad dt = \frac{C\sqrt{AB}\,k\,\theta_1\,d\theta_1}{\sqrt{(2hC - k^2)B - k^2(C - B)\theta_1^2}\sqrt{k^2(C - A)\theta_1^2 - (2hC - k^2)A}},$$

$$(3)\quad d\psi_1 = \frac{C\sqrt{AB}\,k(2hC - k^2 + k^2\theta_1^2)\,d\theta_1}{\theta_1\sqrt{(2hC - k^2)B - k^2(C - B)\theta_1^2}\sqrt{k^2(C - A)\theta_1^2 - (2hC - k^2)A}}.$$

Posons

$$\sqrt{\frac{(2hC - k^2)A}{k^2(C - A)}} = b, \quad \sqrt{\frac{(2hC - k^2)B}{k^2(C - B)}} = c, \quad \theta_1^2 = u;$$

nous aurons, pour l'équation qui donne dt,

$$\frac{2k}{C}\sqrt{\frac{(C - B)(C - A)}{BA}}\,dt = \frac{du}{\sqrt{(c^2 - u)(u - b^2)}},$$

et par suite

$$(4)\quad \frac{2k}{C}\sqrt{\frac{(C - B)(C - A)}{BA}}\,(t + \tau) = \int_{b^2}^{u}\frac{du}{\sqrt{(c^2 - u)(u - b^2)}},$$

en désignant par $-\tau$ le temps pour lequel θ_1 prend sa valeur minimum b. Posons, pour simplifier,

$$(5)\quad \frac{2k}{C}\sqrt{\frac{(C - B)(C - A)}{BA}}\,(t + \tau) = v,$$

et l'équation précédente deviendra

$$\upsilon = \arccos\frac{b^2 + c^2 - 2u}{c^2 - b^2};$$

on en conclut

$$(6) \qquad u = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{b^2 - c^2}{2}\cos\upsilon$$

ou, en remplaçant b, c par leurs valeurs, posant

$$\frac{(C-B)(C-A)}{ABC^2} = L, \quad \frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{2}{C} = M, \quad \frac{B-A}{AB} = N,$$

et remettant θ_1^2 à la place de u,

$$\theta_1^2 = \left(2h - \frac{k^2}{C}\right)\frac{1}{2Lk^2}\left[M - N\cos 2k\sqrt{L}(t+\tau)\right].$$

4. De la formule (1) on tire, en remplaçant $\sin\theta_1$ par θ_1,

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{A(B-C)}{C(B-A)} + \frac{AB}{B-A}\left(2h - \frac{k^2}{C}\right)\frac{1}{k^2\theta_1^2},$$

et, à cause de la valeur précédente de θ_1^2, on en déduit

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{C-B}{BC}\,\frac{1+\cos\upsilon}{M - N\cos\upsilon},$$

$$\cos^2\varphi_1 = \frac{C-A}{AC}\,\frac{1-\cos\upsilon}{M - N\cos\upsilon},$$

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = \sqrt{L}\,\frac{\sin\upsilon}{M - N\cos\upsilon}.$$

Le globe terrestre étant aplati vers les pôles de son axe de rotation, les quantités $\frac{C-A}{C}$, $\frac{C-B}{C}$, quoique petites, ont des valeurs sensibles qui mesurent l'aplatissement; au contraire $B - A$, s'il n'est pas nul, est très-petit, comparé à $C - A$, $C - B$, comme nous le démontrerons. Les trois expressions précédentes sont donc développables en séries très-convergentes, procédant suivant les puissances de $\frac{N}{M}$.

5. En adoptant les mêmes notations que ci-dessus pour écrire l'expression de $d\psi_1$ donnée par la formule (3) et la partageant en deux parties, on obtient facilement la formule

$$\psi_1 - g = J + I,$$

où g désigne une constante arbitraire et où J et I ont les valeurs suivantes :

$$J = \frac{1}{2C\sqrt{L}} \int \frac{du}{\sqrt{(c^2 - u)(u - b^2)}},$$

$$I = \left(2h - \frac{k^2}{C}\right) \frac{1}{2k^2\sqrt{L}} \int \frac{du}{u\sqrt{(c^2 - u)(u - b^2)}}.$$

Des formules (4) et (5) on déduit d'abord

$$J = \frac{1}{2C\sqrt{L}}\, v = \frac{k}{C}(t + \tau).$$

Pour calculer I, nous avons

$$\int \frac{du}{u\sqrt{(c^2 - u)(u - b^2)}} = \frac{-2}{bc} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{c}\sqrt{\frac{c^2 - u}{u - b^2}}\right);$$

or on déduit de la formule (6)

$$c^2 - u = \frac{c^2 - b^2}{2}(1 + \cos v),$$

$$u - b^2 = \frac{c^2 - b^2}{2}(1 - \cos v),$$

$$\frac{c^2 - u}{u - b^2} = \cot^2 \frac{v}{2};$$

l'intégrale précédente est donc égale à

$$-\frac{2}{bc} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{c} \cot \frac{v}{2}\right),$$

et l'on a enfin

$$I = -\operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{A(C - B)}{B(C - A)}} \cot \frac{v}{2}\right].$$

On en conclut

$$\psi_1 - g = \frac{k}{C}(t+\tau) - \text{arc tang}\left[\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\cot\frac{\upsilon}{2}\right] + \text{const.}$$

Si l'on pose

$$\frac{C(B-A)}{B(C-A)} = \eta,$$

η est une très-petite quantité, et, en négligeant le carré de η, on a

$$\frac{A(C-B)}{B(C-A)} = 1 - \eta, \quad \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} = 1 - \frac{\eta}{2}.$$

On a, en général, si h est assez petit pour qu'on en néglige le carré,

$$\text{arc tang}(x+h) = \text{arc tang}\,x + \frac{h}{1+x^2},$$

et, en faisant

$$x = \cot\frac{\upsilon}{2}, \quad h = -\frac{\eta}{2}\cot\frac{\upsilon}{2},$$

on obtient

$$\text{arc tang}\left[\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\cot\frac{\upsilon}{2}\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\upsilon}{2} - \frac{\eta}{4}\sin\upsilon.$$

On a donc

$$\psi_1 - g = \frac{k}{C}(t+\tau) + \frac{\upsilon}{2} + \frac{\eta}{4}\sin\upsilon + \text{const.}$$

D'après ce que nous avons dit au n° **1**, l'angle ψ_1 est compté à partir du nœud du plan invariable sur le plan fixe. Si l'on veut que ψ_1 se réduise à g pour $t = -\tau$, la constante ajoutée au second membre sera nulle, et l'on aura

$$\psi_1 - g = \left(\frac{k}{C} + k\sqrt{L}\right)(t+\tau) + \frac{\eta}{4}\sin 2k\sqrt{L}(t+\tau).$$

Remarquons que la quantité g qui entre dans cette équation est précisément celle qui a été représentée par cette lettre au n° **2**. Si l'on tenait compte du carré de η, on verrait facilement qu'il faut ajouter au second membre de la formule précédente les termes

$$\tfrac{1}{8}\eta^2\sin 2k\sqrt{L}(t+\tau) + \tfrac{1}{32}\eta^2\sin 4k\sqrt{L}(t+\tau).$$

Formules qui déterminent les trois angles φ, θ, ψ.

6. Calculons les trois angles θ, φ, ψ définis au n° **1**, au moyen des formules (A), en nous appuyant sur ce que l'angle θ_1 est très-petit; ce qui nous permettra de négliger les puissances de θ_1 supérieures à la deuxième. De la première de ces formules

$$\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1\cos\psi_1,$$

on déduit

$$\cos\theta = \cos\gamma\left(1 - \theta_1\operatorname{tang}\gamma\cos\psi_1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2\right);$$

on en conclut aussi ces formules qui nous serviront :

$$\sin^2\theta = \sin^2\gamma\left(1 + 2\theta_1\cot\gamma\cos\psi_1 + \theta_1^2\cot^2\gamma - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_1^2}{2}\cos 2\psi_1\right),$$

$$\sin\theta\cos\theta = \sin\gamma\cos\gamma\left[1 + 2\theta_1\cot 2\gamma\cos\psi_1 - \tfrac{3}{2}\theta_1^2 - \theta_1^2\left(1 + \tfrac{1}{2}\cot^2\gamma\cos 2\psi_1\right],\right.$$

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\gamma}\left[1 - \theta_1\cot\gamma\cos\psi_1 + \frac{1}{4\sin^2\gamma}\theta_1^2 + \tfrac{1}{4}\theta_1^2(1 + 3\cot^2\gamma)\cos 2\psi_1\right].$$

De la formule du n° 1

$$\sin(\psi - \alpha) = \sin\psi_1\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta},$$

on déduit

$$\sin(\psi - \alpha) = \frac{\theta_1\sin\psi_1}{\sin\gamma} - \theta_1^2\sin\psi_1\cos\psi_1\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

et, avec le même degré d'approximation,

$$(a)\qquad \psi = \alpha + \frac{\theta_1\sin\psi_1}{\sin\gamma} - \theta_1^2\frac{\cos\gamma}{2\sin^2\gamma}\sin 2\psi_1.$$

Enfin on a la formule

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \sin\psi_1\frac{\sin\gamma}{\sin\theta},$$

de laquelle on déduit

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \sin\psi_1 \Big[1 - \theta_1 \cot\gamma \cos\psi_1 + \frac{1}{4\sin^2\gamma}\theta_1^2 \\ + \tfrac{1}{4}\theta_1^2(1+3\cot^2\gamma)\cos 2\psi_1 \Big].$$

Au moyen de cette formule qui donne le sinus de $\varphi_1 - \varphi$, on peut développer l'arc même suivant les puissances de θ_1, et l'on en conclut

$$(b) \qquad \varphi = \varphi_1 - \psi_1 + \theta_1 \sin\psi_1 \cot\gamma - \tfrac{1}{4}(1 + 2\cot^2\gamma)\theta_1^2 \sin 2\psi_1.$$

Des formules (a) et (b) on déduira facilement les sinus et cosinus de φ, ψ et de leurs multiples ordonnés suivant les puissances de θ_1.

Calcul de la fonction perturbatrice.

7. Soient S la masse du Soleil, qu'on peut supposer réunie à son centre de gravité, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ce centre de gravité, rapportées respectivement aux axes principaux d'inertie A, B, C, passant par le centre de gravité de la Terre. Soient aussi a, b, c les trois coordonnées rapportées aux mêmes axes d'un point du globe terrestre, et dm un élément de sa masse qui passe en ce point. L'attraction de S produit la fonction perturbatrice

$$V = S \int \frac{dm}{[(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 + (z_1-c)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

l'intégrale s'étendant à la masse entière de la Terre. Désignons par L la masse de la Lune, et par x'_1, y'_1, z'_1 les mêmes coordonnées pour la Lune que x_1, y_1, z_1 pour le Soleil ; l'attraction de L donne la fonction perturbatrice

$$V' = L \int \frac{dm}{[(x'_1-a)^2 + (y'_1-b)^2 + (z'_1-c)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

et la fonction Ω du n° 2 est la somme de V et V'.

D'après les propriétés du centre de gravité et des axes principaux d'inertie, on a

$$\int a\,dm=0,\quad \int b\,dm=0,\quad \int c\,dm=0,$$
$$\int bc\,dm=0,\quad \int ca\,dm=0,\quad \int ab\,dm=0.$$

Désignons par ρ et u les distances de S et de l'élément dm au centre de gravité de la Terre ; en développant suivant les puissances de a, b, c la quantité comprise sous le signe $\int$ dans l'expression de V, nous aurons

$$V=\frac{S}{\rho}\int dm-\frac{S}{2\rho^3}\int u^2dm+\frac{3S}{2\rho^5}(x_1^2\int a^2dm+y_1^2\int b^2dm+z_1^2\int c^2dm)+\delta V,$$

δV étant la partie de V qui résulterait des termes du troisième degré et d'ordres supérieurs par rapport à a, b, c. Si aux coordonnées x_1, y_1, z_1, rapportées à des axes mobiles, on substitue les coordonnées x, y, z, rapportées aux axes fixes du n° 1, les quantités x_1, y_1, z_1 seront exprimées au moyen de ces coordonnées et des angles φ, θ, ψ; il en résulte que V est une fonction de ces trois angles, et qu'il ne dépend que par ces angles des six éléments h, β, k, τ, α, g. Toutefois ρ ne dépend pas de ces quantités, et, comme V ne doit entrer dans notre recherche que par ses dérivées, par rapport aux six éléments h, β,..., nous pouvons supprimer les deux premiers termes de V; de plus, en nous servant des égalités

$$z_1^2=\rho^2-x_1^2-y_1^2,$$
$$\int(a^2-c^2)dm=C-A,\quad \int(b^2-c^2)dm=C-B,$$

nous pourrons réduire V à cette expression

$$V=\frac{3S}{2\rho^5}[(C-A)x_1^2+(C-B)y_1^2]+\delta V;$$

nous aurons de même

$$V'=\frac{3L}{2\rho'^5}[(C-A)x_1'^2+(C-B)y_1'^2]+\delta V'.$$

Il est utile de se représenter l'ordre de grandeur de la fonction perturbatrice, et pour cela nous la comparerons à la demi-force vive qui provient du mouvement de rotation de la Terre. Comme p et q sont très-petits, on a à très-peu près pour cette demi-force vive $h = \frac{1}{2}\mathrm{C}r^2$. Ensuite, en désignant par m la vitesse angulaire du Soleil dans son orbite, on a $\frac{\mathrm{S}}{a^3} = m^2$, a étant le demi-grand axe de cette orbite. En prenant le rapport de V à h, on trouve que la première quantité est, par rapport à la seconde, de l'ordre $\left(\frac{m}{r}\right)^2 \varepsilon$, ε étant l'aplatissement de la Terre, c'est-à-dire de l'ordre

$$\frac{1}{366,25^2} \times \frac{1}{306} = 0,0000000243\mathrm{6}.$$

Nous imaginerons que l'on prenne pour le plan fixe des x, y le plan de l'écliptique à une époque déterminée. Si l'on désigne par a, b, c les cosinus des angles de l'axe des x avec les axes des x_1, y_1, z_1, par a′, b′, c′ les mêmes quantités pour l'axe des y, par a″, b″, c″ pour l'axe des z, on passe des coordonnées du premier système à celles du second et réciproquement par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}y_1 + \mathrm{c}z_1, & x_1 &= \mathrm{a}x + \mathrm{a}'y + \mathrm{a}''z, \\ y &= \mathrm{a}'x_1 + \mathrm{b}'y_1 + \mathrm{c}'z_1, & y_1 &= \mathrm{b}x + \mathrm{b}'y + \mathrm{b}''z, \\ z &= \mathrm{a}''x_1 + \mathrm{b}''y_1 + \mathrm{c}''z_1, & z_1 &= \mathrm{c}x + \mathrm{c}'y + \mathrm{c}''z, \end{aligned}$$

et, en remplaçant a, b, c,... par leurs valeurs, en fonction de φ, θ, ψ, qu'on trouve dans tous les ouvrages de Géométrie analytique, on a

$$\begin{aligned} x_1 &= (-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi)x \\ &\quad + (\sin\varphi\cos\psi\cos\theta + \cos\varphi\sin\psi)y + \sin\theta\sin\varphi\, z, \\ y_1 &= (-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta - \sin\varphi\cos\psi)x \\ &\quad + (\cos\varphi\cos\psi\cos\theta - \sin\varphi\sin\psi)y + \sin\theta\cos\varphi\, z, \\ z_1 &= \sin\theta\sin\psi\, x - \sin\theta\cos\psi\, y + \cos\theta\, z. \end{aligned}$$

Nous négligerons d'abord $\delta\mathrm{V}$, sauf à avoir égard dans la suite à son influence, et nous aurons

$$\mathrm{V} = \frac{3\mathrm{S}}{2\rho^5}[(\mathrm{C}-\mathrm{A})(x_1^2+y_1^2) - (\mathrm{B}-\mathrm{A})y_1^2];$$

de même, en négligeant $\delta V'$, nous aurons

$$V' = \frac{3L}{2\rho'^5}[(C-A)(x_1'^2 + y_1'^2) - (B-A)y_1'^2].$$

Si $B - A$ n'est pas nul, il est certainement très-petit par rapport à $C - A$, de sorte que la seconde partie de V et V' est très-petite par rapport à la première.

Désignons par ρ_1 la projection du rayon ρ sur le plan des x, y, et par ν l'angle de cette projection avec l'axe des x; nous aurons

$$x = \rho_1 \cos\nu, \quad y = \rho_1 \sin\nu,$$

et il en résultera

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 \sin\varphi \cos\theta \sin(\nu - \psi) + \rho_1 \cos\varphi \cos(\nu - \psi) + z \sin\theta \sin\varphi, \\ y_1 &= \rho_1 \cos\varphi \cos\theta \sin(\nu - \psi) - \rho_1 \sin\varphi \cos(\nu - \psi) + z \sin\theta \cos\varphi; \end{aligned}$$

nous en concluons

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 = \rho_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho_1^2 \sin^2\theta + \tfrac{1}{2}\rho_1^2 \sin 2\theta \cos^2(\nu - \psi) \\ + z^2 \sin^2\theta + 2\rho_1 z \sin\theta \cos\theta \sin(\nu - \psi), \end{aligned}$$

et nous aurons à substituer cette expression indépendante de φ dans le premier terme de V. On opérerait de la même manière pour le premier terme de V'.

Calcul des quantités h et k.

8. Pour calculer les deux quantités h et k, qui représentent la demi-force vive du mouvement de rotation de la Terre et la grandeur de l'axe du plan invariable, nous emploierons les deux formules (n° 2)

$$(a) \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{d\Omega}{d\tau},$$

$$(b) \qquad \frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{dg},$$

où Ω est égal à $V + V'$. Nous sommes conduit d'après cela à calculer les expressions de

$$\frac{d(x_1^2+y_1^2)}{d\tau},\quad \frac{d(x_1^2+y_1^2)}{dg},\quad \frac{d(y_1^2)}{d\tau},\quad \frac{d(y_1^2)}{dg}.$$

Les termes de ces expressions qui dépendent de l'angle ψ_1 se rapportent à des inégalités qui sont à peu près d'un jour; car l'angle ψ_1 ne se trouve combiné dans ces termes qu'à d'autres angles, qui croîtront avec t beaucoup plus lentement. Ce sont surtout les termes indépendants de ψ_1 qu'il nous importe d'examiner.

Nous avons, en différentiant la dernière formule du n° 7,

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d(x_1^2+y_1^2)}{d\tau} = &\left(-\tfrac{1}{2}\rho_1^2+z^2\right)\frac{d\sin^2\theta}{d\tau}+\tfrac{1}{2}\rho_1^2\,\frac{d\sin^2\theta}{d\tau}\cos 2(\nu-\psi)\\ &+2\rho_1 z\frac{d\sin\theta\cos\theta}{d\tau}\sin(\nu-\psi)+\rho_1^2\sin^2\theta\sin 2(\nu-\psi)\frac{d\psi}{d\tau}\\ &-2\rho_1 z\sin\theta\cos\theta\cos(\nu-\psi)\frac{d\psi}{d\tau}.\end{aligned}\right.$$

D'après le n° 6, on a

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\sin^2\theta}{d\tau} = &\sin^2\gamma(2\cot\gamma\cos\psi_1+2\theta_1\cot^2\gamma-\theta_1-\theta_1\cos 2\psi_1)\frac{d\theta_1}{d\tau}\\ &+(-\theta_1\sin 2\gamma\sin\psi_1+\theta_1^2\sin^2\gamma\sin 2\psi_1)\frac{d\psi_1}{d\tau},\end{aligned}\right.$$

et, en désignant par ε la très-petite quantité $\frac{N}{M}$, on a (n° 3)

$$\theta_1^2=\frac{1}{2Lk^2}\left(2h-\frac{k^2}{C}\right)(M-N\cos v),$$

$$\theta_1\frac{d\theta_1}{d\tau}=\frac{M}{2k\sqrt{L}}\left(2h-\frac{k^2}{C}\right)\varepsilon\sin v,$$

$$\frac{d\theta_1}{d\tau}=\sqrt{\frac{M}{2}}\sqrt{2h-\frac{k^2}{C}}\left(\varepsilon\sin v+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2\sin 2v\right);$$

on a aussi (n° 5)

$$\frac{d\psi_1}{d\tau}=\frac{k}{C}+k\sqrt{L}+\frac{\eta}{2}k\sqrt{L}\cos v.$$

Donc l'expression (d) ne renferme qu'un terme indépendant de ψ_1

$$\sin^2\gamma(2\cot^2\gamma - 1)\theta_1\frac{d\theta_1}{d\tau}$$

et, par suite, la première partie de l'expression (c) renferme le terme

$$(1)\qquad -\left(\frac{1}{2}\rho_1^2 - z^2\right)(2 - 3\sin^2\gamma)\frac{M}{2k\sqrt{L}}\left(2h - \frac{k^2}{C}\right)\varepsilon\sin\upsilon,$$

qui est indépendant de ψ_1, mais qui dépend de υ et dont la période est d'environ cent cinquante-trois jours, en supposant que $C\sqrt{L} = \frac{1}{306}$.

2° Dans la deuxième partie de l'expression (c) faisons

$$\cos 2(\nu - \psi) = \cos 2(\nu - \alpha) + 2\theta_1\frac{\sin\psi_1}{\sin\gamma}\sin 2(\nu - \alpha),$$

et il en résulte ces deux termes indépendants de ψ_1

$$(2)\qquad \tfrac{1}{2}\rho_1^2\cos 2(\nu - \alpha)(2 - 3\sin^2\gamma)\theta_1\frac{d\theta_1}{d\tau},$$

$$(2')\qquad -\rho_1^2\theta_1^2\cos\gamma\sin 2(\nu - \alpha)\frac{d\psi_1}{d\tau},$$

le second terme provenant d'un terme en $\sin^2\psi_1$ qu'on a remplacé par $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\psi_1)$.

3° Dans la troisième partie de l'expression (c), faisons

$$\sin(\nu - \psi) = \sin(\nu - \alpha) - \theta_1\frac{\sin\psi_1}{\sin\gamma}\cos(\nu - \alpha),$$

et remplaçons $\sin\theta\cos\theta$ par sa valeur (n° **6**), nous trouverons ces deux termes indépendants de ψ_1

$$(3)\qquad -\rho_1 z\sin\gamma\cos\gamma(5 + \cot^2\gamma)\theta_1\frac{d\theta_1}{d\tau}\sin(\nu - \alpha),$$

$$(3')\qquad 2\rho_1 z\cos\gamma\cot 2\gamma\,\theta_1^2\cos(\nu - \alpha)\frac{d\psi_1}{d\tau}.$$

4° On trouve de même que la quatrième partie de l'expression (c) renferme les deux termes

$$(4) \qquad -\rho_1^2 \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau} \cos 2(\nu - \alpha),$$

$$(4') \qquad \rho_1^2 \theta_1^2 \cos\gamma \sin 2(\nu - \alpha) \frac{d\psi_1}{d\tau}.$$

5° La dernière partie de (c) donne enfin

$$(5) \qquad -\rho_1 z \cot\gamma\, \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau} \sin(\nu - \alpha),$$

$$(5') \qquad -2\rho_1 z \theta_1^2 \cos\gamma \cot 2\gamma \cos(\nu - \alpha) \frac{d\psi_1}{d\tau}.$$

En faisant la somme des termes (1), (2), (3), (4) et (5), on obtient

$$\left[\left(-\tfrac{1}{2}\rho_1^2 + z^2\right)(2 - 3\sin^2\gamma) - \tfrac{3}{2}\rho_1^2 \sin^2\gamma \cos 2(\nu - \alpha)\right.$$
$$\left. - 2\rho_1 z (2\sin^2\gamma + 1)\sin(\nu - \alpha)\right]\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau};$$

or $\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau}$ renferme $\varepsilon \sin \upsilon$ comme facteur, et l'angle υ ne peut disparaître de ces termes que par sa combinaison avec l'angle ν; il n'en peut donc résulter dans h que des inégalités périodiques et dont la période n'est pas très-grande. Remarquons que ces termes renferment ε comme facteur et, par conséquent, ils sont absolument nuls si B est égal à A.

Les termes (2'), (3'), (4') et (5') semblent, au contraire, donner dans h des inégalités séculaires; car ρ_1 et z peuvent, à très-peu près, être considérés comme des fonctions périodiques dont la période est l'année, et, en les supposant développées en séries de sinus et cosinus, les termes précédents produiraient des termes constants dans $\frac{dh}{dt}$ et des termes proportionnels à t dans h. Mais il arrive justement que le terme (2') se détruit avec (4') et (3') avec (5').

9. Examinons ensuite les termes de $\frac{d(x_1^2 + y_1^2)}{dg}$, qui sont indépen-

dants de l'angle ψ_1. Nous aurons

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d(x_1^2+y_1^2)}{dg} = &-\left(\frac{\rho_1^2}{2}-z^2\right)\frac{d\sin^2\theta}{dg}+\tfrac{1}{2}\rho_1^2\frac{d\sin^2\theta}{dg}\cos 2(\nu-\psi) \\ &+2\rho_1 z\sin(\nu-\psi)\frac{d\sin\theta\cos\theta}{dg} \\ &+\rho_1^2\sin^2\theta\sin 2(\nu-\psi)\frac{d\psi}{dg} \\ &-2\rho_1 z\sin\theta\cos\theta\cos(\nu-\psi)\frac{d\psi}{dg}, \end{aligned}\right.$$

et, d'après les formules du n° 6, on a

$$\frac{d\sin^2\theta}{dg} = \sin^2\gamma(-2\theta_1\cot\gamma\sin\psi_1+\theta_1^2\sin 2\psi_1),$$

$$\frac{d\sin\theta\cos\theta}{dg} = \sin\gamma\cos\gamma[-2\theta_1\cot 2\gamma\sin\psi_1+\theta_1^2(2+\cot^2\gamma)\sin 2\psi_1],$$

$$\frac{d\psi}{dg} = \theta_1\frac{\cos\psi_1}{\sin\gamma}-\theta_1^2\cos 2\psi_1\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}.$$

La première partie de la formule (e) ne donne aucun terme indépendant de ψ_1. La deuxième contient un terme en $\sin^2\psi_1$ qui produit

$$-\theta_1^2\rho_1^2\cos\gamma\sin 2(\nu-\alpha);$$

la troisième contient aussi un terme en $\sin^2\psi_1$ qui produit

$$2\theta_1^2\rho_1 z\cos\gamma\cot 2\gamma\cos(\nu-\alpha);$$

la quatrième contient un terme en $\cos^2\psi_1$ qui donne

$$\theta_1^2\rho_1^2\cos\gamma\sin 2(\nu-\alpha);$$

enfin la cinquième contient aussi un terme en $\cos^2\psi_1$ qui donne

$$-2\theta_1^2\rho_1 z\cos\gamma\cot 2\gamma\cos(\nu-\alpha).$$

On voit que ces quatre termes se détruisent. On peut donc regarder tous les termes de l'expression (e) comme dépendants de l'angle ψ_1.

10. En élevant au carré l'expression de y_1,

$$y_1 = \rho_1 \cos\varphi \cos\theta \sin(\nu - \psi) - \rho_1 \sin\varphi \cos(\nu - \psi) + z \sin\theta \cos\varphi,$$

trouvée au n° **7**, nous aurons

$$\begin{aligned}
y_1^2 = {} & \tfrac{1}{4}\rho_1^2 [\cos^2\theta (1 + \cos 2\varphi) + 1 - \cos 2\varphi] \\
& + \tfrac{1}{4}\rho_1^2 [-\cos^2\theta (1 + \cos 2\varphi) + 1 - \cos 2\varphi] \cos 2(\nu - \psi) \\
& - \tfrac{1}{2}\rho_1^2 \sin 2\varphi \cos\theta \sin 2(\nu - \psi) \\
& + \rho_1 z \sin\theta \cos\theta (1 + \cos 2\varphi) \sin(\nu - \psi) - \rho_1 z \sin\theta \sin 2\varphi \cos(\nu - \psi) \\
& + \tfrac{1}{2} z^2 \sin^2\theta (1 + \cos 2\varphi).
\end{aligned}$$

Comme y_1^2 dans l'expression de V est multipliée par B — A, quantité extrêmement petite, si elle n'est pas nulle, nous négligerons dans le calcul de $\frac{d(y_1^2)}{d\tau}$ et de $\frac{d(y_1^2)}{dg}$ les termes multipliés par θ_1^2 ou par $\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau}$.

En différentiant y_1^2 par rapport à τ, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{d(y_1^2)}{d\tau} = {} & \frac{1}{4}\rho_1^2 \left[-(1 + \cos 2\varphi)\frac{d\sin^2\theta}{d\tau} - \sin^2\theta \frac{d\cos 2\varphi}{d\tau}\right] \\
& + \frac{1}{4}\rho_1^2 \left[(1 + \cos 2\varphi)\frac{d\sin^2\theta}{d\tau} - (1 + \cos^2\theta)\frac{d\cos 2\varphi}{d\tau}\right] \cos 2(\nu - \psi) \\
& + \frac{1}{2}\rho_1^2 [\sin^2\theta - (1 + \cos^2\theta) \cos 2\varphi] \sin 2(\nu - \psi) \frac{d\psi}{d\tau} \\
& - \frac{1}{2}\rho_1^2 \frac{d\sin 2\varphi}{d\tau} \cos\theta \sin 2(\nu - \psi) - \frac{1}{2}\rho_1^2 \sin 2\varphi \frac{d\cos\theta}{d\tau} \sin 2(\nu - \psi) \\
& + \rho_1^2 \sin 2\varphi \cos\theta \cos 2(\nu - \psi) \frac{d\psi}{d\tau} \\
& + \rho_1 z \frac{d\sin\theta\cos\theta}{d\tau}(1 + \cos 2\varphi) \sin(\nu - \psi) \\
& + \rho_1 z \sin\theta \cos\theta \frac{d\cos 2\varphi}{d\tau} \sin(\nu - \psi) \\
& - \rho_1 z \sin\theta \cos\theta (1 + \cos 2\varphi) \cos(\nu - \psi) \frac{d\psi}{d\tau} \\
& - \rho_1 z \frac{d\sin\theta}{d\tau} \sin 2\varphi \cos(\nu - \psi) - \rho_1 z \sin\theta \frac{d\sin 2\varphi}{d\tau} \cos(\nu - \psi) \\
& - \rho_1 z \sin\theta \sin 2\varphi \sin(\nu - \psi) \frac{d\psi}{d\tau} + \frac{1}{2} z^2 \frac{d\sin^2\theta}{d\tau}(1 + \cos 2\varphi) \\
& + \frac{1}{2} z^2 \sin^2\theta \frac{d\cos 2\varphi}{d\tau}.
\end{aligned}$$

En négligeant θ_1^2, on a (n° **6**)

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_1 - \psi_1 + \theta_1 \cot\gamma \sin\psi_1,\\
\cos 2\varphi &= \cos 2\varphi_1 \cos 2\psi_1 + \sin 2\varphi_1 \sin 2\psi_1\\
&\quad - 2\theta_1 \cot\gamma \sin\psi_1 (\sin 2\varphi_1 \cos 2\psi_1 - \cos 2\varphi_1 \sin 2\psi_1),\\
\sin 2\varphi &= \sin 2\varphi_1 \cos 2\psi_1 - \cos 2\varphi_1 \sin 2\psi_1\\
&\quad + 2\theta_1 \cot\gamma \sin\psi_1 (\cos 2\varphi_1 \cos 2\psi_1 + \sin 2\varphi_1 \sin 2\psi_1),
\end{aligned}$$

et, d'après le n° **4**, on a les formules

$$\begin{aligned}
\cos 2\varphi_1 &= \frac{C(B - A) + [2AB - (A + B)C]\cos\upsilon}{ABC(M - N\cos\upsilon)},\\
\sin 2\varphi_1 &= 2\sqrt{L}\,\frac{\sin\upsilon}{M - N\cos\upsilon},
\end{aligned}$$

qu'on peut facilement développer en séries de cosinus ou de sinus de multiples de υ.

On aura

$$\begin{aligned}
\frac{d\sin^2\theta}{d\tau} &= \left(\frac{d\theta_1}{d\tau}\cos\psi_1 + \theta_1 \sin\psi_1 \frac{d\psi_1}{d\tau}\right)\sin 2\gamma;\\
\frac{d\sin\theta\cos\theta}{d\tau} &= \left(\frac{d\theta_1}{d\tau}\cos\psi_1 - \theta_1 \sin\psi_1 \frac{d\psi_1}{d\tau}\right)\cos 2\gamma;
\end{aligned}$$

à ces formules on ajoutera celles qui déterminent

$$\frac{d\psi_1}{d\tau},\quad \sin(\upsilon - \psi),\quad \cos(\upsilon - \psi),\quad \sin 2(\upsilon - \psi),\quad \cos 2(\upsilon - \psi),$$

et, en examinant successivement toutes les parties de $\frac{d(\gamma_1^2)}{d\tau}$, on verra qu'elles ne peuvent produire de termes indépendants de ψ_1, si l'on néglige ceux qui sont multipliés par θ_1^2 ou $\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau}$.

On verra aussi que $\frac{d(\gamma_1^2)}{dg}$ ne renferme que des termes dépendants de l'angle ψ_1 avec le même degré d'approximation. Cette seconde vérification se fait plus rapidement que la première.

11. Il résulte de ce qui précède que $\frac{dV}{d\tau}$ ne renferme aucun terme constant et qu'il ne contient que des termes périodiques. Le plus grand nombre de ces termes périodiques dépendent de l'angle ψ_1, en sorte que leur période diffère peu d'un jour sidéral; les autres dépendent de l'angle υ combiné par addition ou soustraction au moyen mouvement du Soleil et à ses multiples. Les mêmes choses ont lieu pour l'expression de $\frac{dV'}{d\tau}$, avec cette différence que le moyen mouvement du Soleil y est remplacé par celui de la Lune.

On déduit donc de la formule (a) le théorème suivant :

La quantité h, qui représente la demi-force vive due au mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, n'est sujette à aucune inégalité séculaire; ses inégalités sont toutes périodiques; la plupart ont une période qui diffère peu d'un jour, et les autres dépendent d'un argument, qui s'accroît de quatre angles droits dans l'intervalle d'environ 153 jours, combiné avec des multiples du moyen mouvement du Soleil ou de la Lune.

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, tous les termes de $\frac{dV}{dg}$ dépendent de l'angle ψ_1; il en est de même de ceux de $\frac{dV'}{dg}$. De la formule (b) on conclut donc le théorème suivant :

La quantité k, qui représente la grandeur de l'axe du plan invariable, n'est sujette à aucune inégalité séculaire; ses inégalités sont toutes périodiques et leur période diffère peu d'un jour sidéral.

Il suit de là que la quantité h renferme un certain genre d'inégalités qui ne se trouvent pas dans k; mais nous verrons plus loin que ces inégalités sont insensibles.

Sur l'influence de δV et $\delta V'$.

12. Dans les considérations qui précèdent, nous avons négligé les parties de V et V' désignées par δV et $\delta V'$. Examinons quelle peut être l'influence de ces quantités. Nous avons trouvé au n° **7**

$$V = S \int \frac{dm}{[(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

et nous avons développé la quantité soumise au signe $\int$ suivant les puissances de a, b, c; alors nous avons désigné par δV la partie de V, qui est du troisième degré ou de degré supérieur par rapport à a, b, c. Si l'on fait le calcul, en négligeant ce qui est du quatrième degré, on a

$$\begin{aligned}\delta V = &-\frac{3S}{2\rho^5}\Big[x_1\int(a^3+ab^2+ac^2)\,dm + y_1\int(a^2b+b^3+bc^2)\,dm\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + z_1\int(a^2c+b^2c+c^3)\,dm\Big]\\ &+\frac{5S}{2\rho^7}\left(x_1^3\int a^3\,dm + y_1^3\int b^3\,dm + z_1^3\int c^3\,dm\right)\\ &+\frac{15S}{2\rho^7}\Big[\;x_1^2y_1\int a^2b\,dm + x_1y_1^2\int ab^2\,dm\\ &\qquad + y_1^2z_1\int b^2c\,dm + y_1z_1^2\int bc^2\,dm\\ &\qquad + z_1x_1^2\int ca^2\,dm + x_1z_1^2\int ac^2\,dm + 2x_1y_1z_1\int abc\,dm\Big].\end{aligned}$$

La Terre différant peu d'un solide de révolution, nous pouvons admettre, dans le calcul actuel, qu'elle est rigoureusement symétrique par rapport aux deux plans qui passent par l'axe C et par l'axe A ou B; mais, pour plus de rigueur, nous supposerons que cette symétrie n'ait pas lieu exactement par rapport au plan de l'équateur. Alors, en supprimant comme nulles toutes les intégrales des différentielles impaires en a ou b, on a

$$\begin{aligned}\delta V = &-\frac{S}{2}\left(\frac{3z_1}{\rho^5}-\frac{5z_1^3}{\rho^7}\right)\int c^3\,dm + \frac{3S}{2}\left(\frac{-z_1}{\rho^5}+\frac{5x_1^2z_1}{\rho^7}\right)\int a^2c\,dm\\ &+\frac{3S}{2}\left(\frac{-z_1}{\rho^5}+\frac{5y_1^2z_1}{\rho^7}\right)\int b^2c\,dm.\end{aligned}$$

On a ensuite

$$-\frac{z_1}{\rho^5}+\frac{5x_1^2z_1}{\rho^7} = \frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{\rho^5}-\frac{5z_1^3}{\rho^7}\right)+\frac{5}{2}\,\frac{z_1(x_1^2-y_1^2)}{\rho^7},$$

parce que $y_1^2 = \rho^2 - x_1^2 - z_1^2$, et l'on a de même

$$-\frac{z_1}{\rho^5}+\frac{5y_1^2z_1}{\rho^7} = \frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{\rho^5}-\frac{5z_1^3}{\rho^7}\right)-\frac{5}{2}\,\frac{z_1(x_1^2-y_1^2)}{\rho^7}$$

On en conclut

$$\delta V = \frac{S}{4}\left(\frac{3z_1}{\rho^5} - \frac{5z_1^3}{\rho^7}\right)\left[-2\int c^3 dm + 3\int (a^2+b^2) c\, dm\right]$$
$$+ \frac{15}{4} S \frac{z_1(x_1^2 - y_1^2)}{\rho^7}\left(\int a^2 c\, dm - \int b^2 c\, dm\right).$$

La Terre étant supposée un solide de révolution, la seconde partie de cette expression de δV est nulle, et l'on peut écrire

$$\delta V = SK\left(\frac{3z_1}{\rho^5} - \frac{5z_1^3}{\rho^7}\right).$$

Examinons l'influence de cette expression dans le calcul de $\frac{dV}{d\tau}$ et $\frac{dV}{dg}$. En faisant, comme précédemment (n° 7),

$$x = \rho_1 \cos\nu, \quad y = \rho_1 \sin\nu,$$

nous aurons

$$z_1 = -\rho_1 \sin\theta \sin(\nu - \psi) + z\cos\theta.$$

S'il existe une différence d'aplatissement entre les deux hémisphères, elle est excessivement petite; donc K est très-petit, et nous pouvons négliger dans δV les termes en θ_1^2, $\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau}$. Or on voit que, avec ce degré d'approximation, les quantités

$$\frac{dz_1}{d\tau} = -\rho_1 \sin(\nu - \psi)\frac{d\sin\theta}{d\tau} + \rho_1 \sin\theta\cos(\nu-\psi)\frac{d\psi}{d\tau} + z\frac{d\cos\theta}{d\tau},$$
$$\frac{dz_1}{dg} = -\rho_1 \sin(\nu - \psi)\frac{d\sin\theta}{dg} + \rho_1 \sin\theta\cos(\nu-\psi)\frac{d\psi}{dg} + z\frac{d\cos\theta}{dg}$$

ne renferment que des termes dépendant de ψ_1. Il en est de même des deux expressions

$$\frac{d(z_1^3)}{d\tau} = 3z_1^2\frac{dz_1}{d\tau}, \quad \frac{d(z_1^3)}{dg} = 3z_1^2\frac{dz_1}{dg};$$

car, comme les termes de $\frac{dz_1}{d\tau}$, $\frac{dz_1}{dg}$ renferment tous la quantité θ_1 ou $\frac{d\theta_1}{d\tau}$ en facteur, on doit réduire z_1^2 à l'expression

$$[-\rho_1 \sin\gamma \sin(\nu - \alpha) + z\cos\gamma]^2,$$

qui est entièrement indépendante de ψ_1. Ainsi δV ne renferme que des termes qui dépendent de ψ_1 ; la même chose a lieu pour $\delta V'$.

Nous pouvons conclure de là qu'une différence d'aplatissement entre les deux hémisphères terrestres n'apporterait aucune modification aux conclusions auxquelles nous sommes arrivé (n° **11**) sur les valeurs de h et k.

Les expressions de δV et $\delta V'$ contiennent ensuite des termes qui sont du quatrième degré par rapport à a, b, c ; on comprend aisément qu'ils sont très-petits et négligeables. D'ailleurs on peut démontrer que, par rapport aux premiers termes de V, V', ils sont de l'ordre du carré de la parallaxe de l'astre perturbateur, multiplié par le carré de l'aplatissement de la Terre. (*Voir* le Mémoire de M. Serret, *Annales de l'Observatoire*, 1859, t. V, p. 264.)

Remarque. — Nous avons supposé dans nos raisonnements les masses du Soleil et de la Lune condensées à leurs centres de gravité; mais décomposons la masse de la Lune en parties infiniment petites, et prenons la fonction perturbatrice provenant de chacun de ces éléments, nous arriverons pour chaque élément aux mêmes conclusions auxquelles nous sommes parvenu pour le centre; il en sera donc de même si nous prenons la fonction perturbatrice provenant de la masse entière de la Lune. Ensuite, comme la théorie du mouvement de rotation de la Terre ne dépend pas du mouvement de rotation du Soleil, on peut remplacer ce dernier mouvement par un autre qui s'effectuerait comme pour la Lune, dans le même temps que la translation du Soleil; donc, en décomposant le Soleil en éléments, on arrive encore aux mêmes conclusions qu'en supposant sa masse concentrée en son centre de gravité.

Sur les inégalités périodiques et séculaires de la vitesse de rotation de la Terre et sur la mesure du temps en jours sidéraux.

13. Désignons par h_0, k_0 les parties constantes de h, k et par Δh, Δk les parties restantes, en sorte que l'on a (n° 8)

$$\Delta h = \int \frac{d\Omega}{d\tau}\,dt, \quad \Delta k = \int \frac{d\Omega}{dg}\,dt;$$

nous avons vu que Δh, Δk ne renferment pas d'inégalités séculaires, mais des inégalités périodiques que nous avons énumérées.

En négligeant le carré de Δk, nous avons

$$2h - \frac{k^2}{C} = 2h_0 - \frac{k_0^2}{C} + 2\left(\Delta h - \frac{k_0}{C}\Delta k\right),$$

et nous avons trouvé

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2Lk^2}\left(2h - \frac{k^2}{C}\right)(M - N\cos\upsilon);$$

θ_1 est sensiblement égal à l'angle de l'axe de rotation de la Terre avec l'axe du plus grand moment d'inertie (n° 5). Examinons comment tourne le plan de cet angle autour de l'axe d'inertie.

On a, pour les composantes de la vitesse de rotation par rapport aux axes principaux d'inertie,

$$p = \frac{k}{A}\theta_1 \sin\varphi_1, \quad q = \frac{k}{B}\theta_1\cos\varphi_1, \quad r = \frac{k}{C}\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right).$$

De la dernière expression on conclut que la vitesse de rotation de la Terre est à peu près égale à $\frac{k_0}{C}$, que nous représenterons par n; si l'on prend pour unité de temps le jour sidéral, n est donc égal à 360 degrés. Dans un jour sidéral, φ_1, qui est sensiblement égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{\upsilon}{2}$, diminue environ de $k\sqrt{L}$ ou de $\frac{n}{306}$. L'angle de la projection de l'axe de rotation sur le plan de l'équateur avec l'axe d'inertie A a pour tangente $\frac{q}{p}$ ou $\operatorname{tang}\frac{\upsilon}{2}$, parce que A et B sont très-peu différents; donc, dans l'intervalle d'un jour sidéral, le plan de l'axe de rotation et de l'axe du plus grand moment d'inertie décrit autour de ce dernier un angle égal à $\frac{n}{306}$; autrement dit, le rayon mené du pôle de l'axe principal d'inertie au pôle de l'axe de rotation décrira une révolution entière dans l'intervalle de 306 jours.

Comme les périodes des inégalités qui composent θ_1 ne sont pas commensurables avec cette période de 306 jours, si l'angle θ_1 peut atteindre la valeur d'une seconde, la latitude d'un lieu de la Terre doit pouvoir varier d'une quantité s'élevant jusqu'à deux secondes dans l'intervalle de 153 jours. Jusqu'à présent l'observation n'a pu constater la variation de latitude d'un lieu de la Terre. L'expression ci-dessus de θ_1^2 a donc une valeur très-petite, et, par suite, quoique h_0 et k_0 aient des valeurs considérables, la quantité $2h_0 - \frac{k_0^2}{C}$ a une valeur positive excessivement petite, que nous désignerons par j, et nous aurons

$$2h - \frac{k^2}{C} = j + 2(\Delta h - n\Delta k).$$

Nous avons vu que Δh, Δk ne renferment pas d'inégalités séculaires et ne contiennent que des inégalités périodiques et à courtes périodes. Donc la quantité précédente ne subit non plus aucune variation séculaire, et il en est de même de θ_1^2. Or, d'après les observations, θ_1 ne prend pas de valeur sensible dans les intervalles de temps indiqués par les périodes de Δh, Δk. Donc θ_1 et θ_1^2 ne subissent ni inégalités séculaires ni inégalités périodiques appréciables.

Il en résulte que p et q ne peuvent prendre que des valeurs insensibles, et, d'après ce qui a été démontré de la quantité k, la quantité r ne peut varier aussi d'une quantité appréciable.

14. Cependant le résultat que nous venons d'obtenir n'est pas encore suffisant pour que l'on soit assuré que le temps peut être mesuré avec exactitude en jours sidéraux ; car une différence insensible sur la grandeur de la vitesse de rotation de la Terre pourrait apporter sur la mesure d'un temps considérable une différence appréciable. On a pour la vitesse angulaire ω, autour de l'axe instantané de rotation,

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = r\left(1 + \frac{p^2 + q^2}{2r^2}\right),$$

et la longueur du jour sidéral est le temps pendant lequel l'intégrale $\int \omega\, dt$ s'accroît de 2π. Donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^t \omega\, dt$ est la mesure du temps en jours sidéraux depuis le temps $t = 0$, et il s'agit de prouver que cette quantité est effectivement proportionnelle à t.

En négligeant le produit de θ_1^2 par $\frac{B-A}{B}$, qui est excessivement petit, comme on le verra dans le numéro suivant, on a

$$p^2+q^2 = k^2\theta_1^2\left(\frac{\sin^2\varphi_1}{A^2}+\frac{\cos^2\varphi_1}{B^2}\right) = \frac{k^2\theta_1^2}{A^2}:$$

on a donc

$$\omega = r + \frac{1}{2r}\frac{k^2}{A^2}\theta_1^2$$

et, en remplaçant r par sa valeur,

$$\omega = \frac{k}{C} + \frac{k}{2C}\frac{C^2-A^2}{A^2}\theta_1^2.$$

Si l'on néglige les termes périodiques très-petits de k, on peut remplacer $\frac{k}{C}$ par la valeur constante n, et l'on a

$$\int\omega\,dt = nt + \frac{n}{2}\frac{C^2-A^2}{A^2}\int\theta_1^2\,dt.$$

En désignant par P la quantité $2(\Delta h - n\Delta k)$, qui est entièrement périodique, on a

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2Lk^2}(j+P)(M-N\cos v).$$

Le produit de P par N $\cos v$ ne donnerait que des termes périodiques, et d'ailleurs il est négligeable; donc, en supprimant la partie très-petite périodique, on a

$$(a)\qquad \int\omega\,dt = nt + \frac{n}{4}\frac{C^2-A^2}{A^2}\frac{M}{Lk^2}jt,$$

quantité proportionnelle à t, comme il fallait le démontrer. La vitesse moyenne de rotation de la Terre est donc égale à

$$n + \frac{n}{4}\frac{C^2-A^2}{A^2}\frac{M}{Lk^2}j$$

ou à

$$n + \frac{1}{Cn}j,$$

en commettant une très-petite erreur sur le second terme, qui est lui-même excessivement petit. En effet, supposons que θ_1 soit toujours plus petit qu'une seconde, en sorte que la latitude d'un lieu de la Terre ne puisse varier de deux secondes, on aura

$$\frac{M}{2Lk^2}(j + P) < \frac{\pi^2}{180^2 \times 60^4}.$$

La quantité P peut être positive, négative ou nulle; donc, l'inégalité devant avoir lieu pour $P = 0$, on a

$$\frac{M}{2Lk^2} j < \frac{\pi^2}{180^2 \times 60^4}$$

ou

$$\frac{306}{Cn^2} j < \frac{\pi^2}{180^2 \times 60^4};$$

on a donc

$$\frac{1}{Cn} j < \frac{n\pi^2}{306 \times 180^2 \times 60^4},$$

et le second terme de la formule (a) ne variera pas d'une seconde d'arc dans 170 000 ans.

En résumant tout ce qui précède, on obtient les résultats suivants : L'axe de rotation de la Terre ne pourra jamais s'écarter de l'axe du plus grand moment d'inertie que d'une quantité insensible, en sorte que la longitude et la latitude d'un lieu de la Terre ne changeront pas par la suite des temps. La vitesse moyenne de rotation de la Terre est constante et la longueur du jour sidéral est invariable, si l'on fait abstraction de petites inégalités périodiques insensibles; enfin cette longueur peut être employée comme unité pour la mesure du temps.

Détermination d'une limite de la quantité $\frac{B - A}{B}$.

15. On doit remarquer que tous les termes de $\frac{d\Omega}{d\tau}$, $\frac{d\Omega}{dg}$, excepté ceux qui sont multipliés par $B - A$, renferment le facteur très-petit θ_1 ou

$\frac{d\theta_1}{d\tau}$. Or on a

$$\frac{dh}{dt} - n\frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{d\tau} - n\frac{d\Omega}{dg};$$

donc, pour calculer les termes les plus influents de $\Delta h - n\Delta k$, on peut réduire l'expression précédente à

$$(1) \qquad -\frac{3}{2}\frac{S}{\rho^5}(B-A)\left[\frac{d(y_1^2)}{d\tau} - n\frac{d(y_1^2)}{dg}\right],$$

en ne considérant d'abord que l'action du Soleil.

Les parties les plus considérables de l'expression

$$(2) \qquad \frac{d(y_1^2)}{d\tau} - n\frac{d(y_1^2)}{dg},$$

et devant lesquelles les autres peuvent être négligées, sont, comme on le voit facilement,

$$\begin{aligned}&[-\tfrac{1}{4}\rho_1^2\sin^2\theta - \tfrac{1}{4}\rho_1^2(1+\cos^2\theta)\cos 2(\nu-\psi) + \rho_1 z\sin\theta\cos\theta\sin(\nu-\psi)]\\ &\times\left(\frac{d\cos 2\varphi}{d\tau} - n\frac{d\cos 2\varphi}{dg}\right)\\ &-\left[\frac{1}{2}\rho_1^2\cos\theta\sin 2(\nu-\psi) + \rho_1 z\sin\theta\cos(\nu-\psi)\right]\left(\frac{d\sin 2\varphi}{d\tau} - n\frac{d\sin 2\varphi}{dg}\right).\end{aligned}$$

En négligeant $(B-A)^2$, on peut faire ici $2\varphi_1 = \pi - v$, et par suite (n° **10**)

$$\begin{gathered}\cos 2\varphi = -\cos(2\psi_1 + v), \quad \sin 2\varphi = \sin(2\psi_1 + v),\\ \frac{d\cos 2\varphi}{d\tau} - n\frac{d\cos 2\varphi}{dg} = 4k\sqrt{L}\sin(2\psi_1 + v),\\ \frac{d\sin 2\varphi}{d\tau} - n\frac{d\sin 2\varphi}{dg} = 4k\sqrt{L}\cos(2\psi_1 + v).\end{gathered}$$

Les termes qui renferment le facteur z étant très-petits vis-à-vis des autres, on peut les négliger dans la recherche actuelle; ensuite on peut remplacer δ par γ, et l'on obtient pour l'expression (2)

$$[-\sin^2\gamma - (1+\cos^2\gamma)\cos 2(\nu-\psi)]\; k\sqrt{L}\rho_1^2 \sin(2\psi_1+v) \\ - 2k\sqrt{L}\cos\gamma\,\rho_1^2 \sin 2(\nu-\psi)\cos(2\psi_1+v).$$

Si l'on désigne par m le moyen mouvement du Soleil, on a à peu près, en regardant ρ comme constant,

$$\frac{S}{\rho^3} = m^2 = \frac{n^2}{366^2};$$

en faisant aussi $\rho_1 = \rho$, on aura pour l'expression (1)

$$+\tfrac{3}{2} m^2 (B-A)k\sqrt{L}[\sin^2\gamma + (1+\cos^2\gamma)\cos 2(\nu-\psi)]\sin(2\psi_1+v) \\ + 3\,m^2(B-A)k\sqrt{L}\cos\gamma\sin 2(\nu-\psi)\cos(2\psi_1+v).$$

On commettra une erreur que l'on peut négliger ici, en intégrant par rapport à t cette expression, comme si l'angle ψ_1 renfermait seul le temps de t, et, en doublant, on aura pour la partie de $2(\Delta h - n\Delta k)$ qui provient du Soleil,

$$(3)\quad \begin{cases} -\dfrac{3m^2}{2n}(B-A)k\sqrt{L}\,[\sin^2\gamma + (1+\cos^2\gamma)\cos 2(\nu-\psi)]\cos(2\psi_1+v) \\ \quad + \dfrac{3m^2}{n}(B-A)k\sqrt{L}\cos\gamma\sin 2(\nu-\psi)\sin(2\psi_1+v). \end{cases}$$

En regardant ρ et ρ' comme constants, désignons par χ le rapport de $\frac{L}{\rho'^3}$ à $\frac{S}{\rho^3}$, qui mesure le rapport des actions perturbatrices du Soleil et de la Lune et qu'on trouve, d'après la théorie des marées, égal à 2,35. On aura, pour la partie de $P = 2(\Delta h - n\Delta k)$ qui provient de la Lune, les termes analogues aux termes (3)

$$(4)\quad \begin{cases} -\dfrac{3m^2}{2n}\chi(B-A)k\sqrt{L}[\sin^2\gamma + (1+\cos^2\gamma)\cos 2(\nu'-\psi)]\cos(2\psi_1+v) \\ \quad + \dfrac{3m^2}{n}\chi(B-A)k\sqrt{L}\cos\gamma\sin 2(\nu'-\psi)\sin(2\psi_1+v). \end{cases}$$

D'après le n° **13**, on a

$$\vartheta_1^2 = \frac{1}{2Lk^2}(j + P)(M - N\cos\upsilon),$$

et approximativement

$$(5) \qquad \vartheta_1^2 = \frac{M}{2Lk^2}(j + P).$$

Aux époques des équinoxes, on a $\nu = \psi$ ou $= \psi + \pi$; aux époques des syzygies, on a $\nu' = \nu$ ou $= \nu + \pi$; donc, si l'on se trouve très-près d'un équinoxe en même temps qu'à une nouvelle ou à une pleine Lune, P étant la somme des expressions (3) et (4), on a, pour la valeur de P, à très-peu près,

$$-\frac{3m^2}{n}(1 + \chi)(B - A)k\sqrt{L}\cos(2\psi_1 + \upsilon).$$

On a, à très-peu près (*voir* n° **3**),

$$\sqrt{L} = \frac{1}{306}\frac{1}{C}, \quad M = \frac{2}{306}\frac{1}{B};$$

donc, si l'on pose

$$\lambda = \frac{3m^2}{2n}(B - A)\frac{M}{k\sqrt{L}}(1 + \chi),$$

on aura

$$\lambda = 3\frac{B - A}{B}\frac{1}{366^2}(1 + \chi),$$

et la partie de la formule (5) qui est multipliée par P deviendra $-\lambda\cos(2\psi_1 + \upsilon)$; sa valeur variera de zéro à $\pm\lambda$, dans l'intervalle d'environ un quart de jour sidéral.

Nous avons posé précédemment

$$2h - \frac{k^2}{C} = j + P,$$

j étant la partie constante et P la partie périodique, qui est essentiellement différente de zéro, si B est différent de A. Or la quantité P peut changer de signe, et, comme le premier membre de l'égalité est toujours positif (n° **1**), il faut en conclure que j a une valeur très-petite positive, mais essentiellement différente de zéro, tant que B est supposé différent de A.

La quantité P reste toujours inférieure à j; si l'on admet que la latitude d'un lieu de la Terre ne peut varier de 2 secondes dans l'espace de quelques jours, la partie de θ_1^2 provenant de j est plus petite que le carré d'une seconde d'arc (n° **14**); il faut donc en conclure que l'on a aussi

$$\lambda < \frac{\pi^2}{180^2 \times 60^4}$$

et, par suite,

$$\frac{B-A}{B} < \frac{\pi^2\, 366^2}{3(1+\chi)\, 180^2 60^4},$$

et, en faisant le calcul,

$$\frac{B-A}{B} < \frac{1}{3197939}.$$

On en conclut que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est plus petit que le tiers d'un millionième, et plus petit aussi que le $\frac{1}{10000}$ de l'aplatissement des pôles.

Remarques sur la théorie précédente et comparaison de cette théorie avec celle de Poisson.

16. Tout le Mémoire qui précède s'appuie sur la formule du n° **5**

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2Lk^2}\left(2h - \frac{k^2}{C}\right)(M - N\cos v),$$

d'après laquelle on est conduit à regarder θ_1 et, par suite, p, q comme de l'ordre de la racine carrée de la fonction perturbatrice. La quantité θ_1

ne serait de l'ordre de la fonction perturbatrice qu'autant qu'on admettrait *a priori* que $\frac{B-A}{B}$ est de l'ordre de cette fonction.

Une considération très-simple, mais très-importante, de ma théorie consiste à diviser les fonctions V et V' en deux parties (n° 7), l'une qui est multipliée par C — A, et l'autre qui est multipliée par B — A. La première partie donne dans θ_1^2 des termes qui sont très-petits, parce qu'ils sont de l'ordre de la fonction perturbatrice multipliée par θ_1 ou $\frac{d\theta_1}{d\tau}$; la seconde partie donnerait dans θ_1^2 des termes très-influents, si B — A n'était pas très-petit, et ces termes me permettent de démontrer, en m'appuyant sur les observations astronomiques, que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est extrêmement petit.

Poisson, dans son Mémoire *Sur le mouvement de rotation de la Terre* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII, 1827), néglige les termes de la fonction perturbatrice qui dépendent de l'angle $\nu - \psi$ ou $\nu' - \psi$, par la raison qu'ils ne peuvent donner des termes à longue période, et il néglige comme très-petits les termes qui sont multipliés par les excentricités des deux orbites ou par leurs inclinaisons sur l'écliptique d'une époque déterminée. On peut reconnaître par le n° 15 que les termes les plus importants de θ_1^2 sont deux termes multipliés par $\cos 2(\nu - \psi)$ et $\sin 2(\nu - \psi)$, et ils ne peuvent être rejetés dans la recherche des inégalités séculaires qu'autant qu'on a remarqué que ces termes dépendent de l'angle $2\psi_1 + v$; car, autrement, le produit de $\cos 2(\nu - \psi)$ par le terme qui dépend du carré de l'excentricité dans $\frac{1}{\rho^3}$ ou $\frac{1}{\rho'^3}$ donnerait une inégalité séculaire.

A la vérité, ce terme en $\cos 2(\nu - \psi)$ est multiplié par $\frac{B-A}{B}$, qui est extrêmement petit; mais il faut observer que l'extrême petitesse de cette quantité a été démontrée pour la première fois dans le Mémoire actuel. Remarquons encore, à cette occasion, qu'on peut, avec une grande approximation, remplacer la quantité $\frac{2C-A-B}{2C}$ qu'on rencontre dans la théorie de la précession des équinoxes par $\frac{C-A}{C}$, en faisant $B = A$, sans que $\frac{B-A}{B}$ soit extrêmement petit. Ainsi, par exemple, si l'on supposait que $\frac{B-A}{B}$ fût $\frac{1}{50}$ de $\frac{C-A}{C}$, en remplaçant B par A dans l'expression $\frac{2C-A-B}{2C}$, on ne commettrait sur cette quantité qu'une erreur de $\frac{1}{100}$ de sa valeur. Néanmoins on avait cru utile jusqu'à présent de faire dans cette expression la distinction de A et B.

EXPLICATION

DES

IRRÉGULARITÉS OBSERVÉES DANS LE MOUVEMENT D'URANUS,

Fondée sur l'hypothèse des perturbations causées par une planète plus éloignée; comprenant une détermination de la masse, de l'orbite et de la position du corps perturbant (suite);

PAR M. J.-C. ADAMS, M. A.,

Membre du collége de Saint-Jean, à Cambridge, Associé étranger de l'Académie des Sciences de l'Institut de France,
de la Société royale astronomique et de la Société philosophique de Cambridge.

(Extrait de l'Appendice du *Nautical Almanac* pour l'année 1851.)

39. Si nous substituons à δx_2, δy_2 leurs valeurs en termes de δx_1, δy_1, nous trouverons

$$\begin{aligned}
6,5294\,\delta x_1 + 5,4577\,\delta x_2 &= 6,5700\,\delta x_1 + 0,0490\,\delta y_1 \\
1,2578\,\delta y_1 + 3,3771\,\delta y_2 &= -0,0303\,\delta x_1 + 1,2829\,\delta y_1 \\
11,1297\,\delta x_1 + 14,4919\,\delta x_2 &= 11,2378\,\delta x_1 + 0,1300\,\delta y_1 \\
5,0833\,\delta y_1 + 14,8824\,\delta y_2 &= -0,1335\,\delta x_1 + 5,1943\,\delta y_1.
\end{aligned}$$

Donc, si nous ajoutons aux dernières équations

$$\begin{aligned}
&-1,7106\ (x) - 0,03607\,(y),\\
&0,00165(x) - 4,0487\ \ (y) \text{ respectivement,}
\end{aligned}$$

δx_1 et δy_1 seront éliminés, et nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 80'',28 = {}& \,0,2883h_1 - 0,7295h_2 - 4,4559h_3 \\ & + 0,0138k_1 + 0,0748k_2 + 0,1223k_3 \\ & + 0,1479p_1 + 0,0813p_2 + 0,1997p_3 \\ & + 0,0030q_1 + 0,0011q_2 + 0,0343q_3. \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 3'',34 = {}& - 0,0055h_1 - 0,0132h_2 - 0,0106h_3 \\ & + 0,0212k_1 - 0,0939k_2 - 0,9662k_3 \\ & - 0,0021p_1 - 0,0011p_2 - 0,0093p_3 \\ & + 0,0066q_1 + 0,0017q_2 + 0,0203q_3. \end{aligned}\right.$$

40. Les équations de condition fournies par les observations anciennes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} 62,6 = {}& \delta\varepsilon - 0,8776\,\delta x_1 + 0,5402\,\delta x_2 + 0,7923h_1 + 0,2554h_2 \\ & - 39,31\,\delta n - 0,4795\,\delta y_1 + 0,8415\,\delta y_2 + 0,6101k_1 + 0,9668k_2 \\ & - 0,3875h_3 \quad - 0,9877p_1 \quad - 0,6870p_2 - 0,1009p_3 \\ & + 0,9219k_3 \quad + 0,1566q_1 \quad - 0,7267q_2 - 0,9949q_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 84,5 = {}& \delta\varepsilon + 0,4975\,\delta x_1 - 0,5050\,\delta x_2 - 0,0887h_1 - 0,9843h_2 \\ & - 32,30\,\delta n - 0,8675\,\delta y_1 - 0,8631\,\delta y_2 + 0,9961k_1 - 0,1767k_2 \\ & + 0,2634h_3 \quad - 0,9085p_1 \quad - 0,3355p_2 + 0,9681p_3 \\ & - 0,9647k_3 \quad - 0,4178q_1 \quad - 0,9420q_2 - 0,2506q_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 67,2 = {}& \delta\varepsilon + 0,6732\,\delta x_1 - 0,0935\,\delta x_2 - 0,2243h_1 - 0,8994h_2 \\ & - 31,34\,\delta n - 0,7394\,\delta y_1 - 0,9956\,\delta y_2 + 0,9745k_1 - 0,4371k_2 \\ & + 0,6277h_3 \quad - 0,8720p_1 \quad - 0,2815p_2 + 0,9982p_3 \\ & - 0,7785k_3 \quad - 0,4895q_1 \quad - 0,9596q_2 - 0,0591q_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -51,8 = {}& \delta\varepsilon - 0,2616\,\delta x_1 - 0,8631\,\delta x_2 - 0,9436h_1 + 0,7809h_2 \\ & - 19,59\,\delta n + 0,9652\,\delta y_1 - 0,5050\,\delta y_2 - 0,3310k_1 + 0,6247k_2 \\ & - 0,5301h_3 \quad - 0,0731p_1 \quad + 0,3991p_2 - 0,6801p_3 \\ & - 0,8479k_3 \quad - 0,9973q_1 \quad - 0,9169q_2 + 0,7331q_3, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-43{,}2 = \; & \delta\varepsilon - 0{,}4741\,\delta x_1 - 0{,}5505\,\delta x_2 - 0{,}8861\,h_1 + 0{,}5704\,h_2 \\
& - 18{,}58\,\delta n + 0{,}8805\,\delta y_1 - 0{,}8348\,\delta y_2 - 0{,}4634\,k_1 + 0{,}8213\,k_2 \\
& - 0{,}1248\,h_3 + 0{,}0115\,p_1 + 0{,}4532\,p_2 - 0{,}8147\,p_3 \\
& - 0{,}9922\,k_3 - 0{,}9999\,q_1 - 0{,}8914\,q_2 + 0{,}5798\,q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-50{,}1 = \; & \delta\varepsilon - 0{,}6430\,\delta x_1 - 0{,}1731\,\delta x_2 - 0{,}8191\,h_1 + 0{,}3420\,h_2 \\
& - 17{,}68\,\delta n + 0{,}7659\,\delta y_1 - 0{,}9849\,\delta y_2 - 0{,}5736\,k_1 + 0{,}9397\,k_2 \\
& + 0{,}2588\,h_3 + 0{,}0871\,p_1 + 0{,}5001\,p_2 - 0{,}9063\,p_3 \\
& - 0{,}9659\,k_3 - 0{,}9962\,q_1 - 0{,}8660\,q_2 + 0{,}4225\,q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-37{,}8 = \; & \delta\varepsilon - 0{,}9492\,\delta x_1 + 0{,}8021\,\delta x_2 - 0{,}5743\,h_1 - 0{,}3404\,h_2 \\
& - 15{,}25\,\delta n + 0{,}3145\,\delta y_1 - 0{,}5972\,\delta y_2 - 0{,}8186\,k_1 + 0{,}9403\,k_2 \\
& + 0{,}9652\,h_3 + 0{,}2872\,p_1 + 0{,}6192\,p_2 - 0{,}9984\,p_3 \\
& - 0{,}2613\,k_3 - 0{,}9579\,q_1 - 0{,}7852\,q_2 - 0{,}0560\,q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-20{,}5 = \; & \delta\varepsilon - 0{,}9985\,\delta x_1 + 0{,}9942\,\delta x_2 - 0{,}3671\,h_1 - 0{,}7304\,h_2 \\
& - 13{,}60\,\delta n - 0{,}0538\,\delta y_1 + 0{,}1074\,\delta y_2 - 0{,}9302\,k_1 + 0{,}6830\,k_2 \\
& + 0{,}9035\,h_3 + 0{,}4164\,p_1 + 0{,}6928\,p_2 - 0{,}9251\,p_3 \\
& + 0{,}4286\,k_3 - 0{,}9092\,q_1 - 0{,}7212\,q_2 - 0{,}3796\,q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\;2{,}4 = \; & \delta\varepsilon - 0{,}9633\,\delta x_1 + 0{,}8560\,\delta x_2 - 0{,}2363\,h_1 - 0{,}8883\,h_2 \\
& - 12{,}64\,\delta n - 0{,}2684\,\delta y_1 + 0{,}5170\,\delta y_2 - 0{,}9717\,k_1 + 0{,}4593\,k_2 \\
& + 0{,}6562\,h_3 + 0{,}4882\,p_1 + 0{,}7327\,p_2 - 0{,}8345\,p_3 \\
& + 0{,}7546\,k_3 - 0{,}8727\,q_1 - 0{,}6806\,q_2 - 0{,}5511\,q_3.
\end{aligned}
$$

11. L'équation qui doit faire connaître p_3 peut être formée, comme ci-dessus, en multipliant respectivement les équations précitées, à partir de la seconde, par

$$-0{,}8, \quad -0{,}6, \quad +1{,}0 \quad +1{,}0, \quad +0{,}9, \quad +0{,}6, \quad +0{,}4, \quad +0{,}3$$

et l'équation pour trouver q_3, en multipliant les mêmes équations par

$$1{,}0, \quad 1{,}0, \quad 0{,}5, \quad 0{,}4, \quad 0{,}3, \quad 0{,}2, \quad 0{,}1, \quad 0{,}1.$$

Ainsi l'on obtient

$$\begin{aligned}-279'',64 = {} & 2,80\,\partial\varepsilon - 3,3742\,\partial x_1 + 0,0265\,\partial x_2 - 2,9237\,h_1 + 2,2232\,h_2 \\ & -27,82\,\partial n + 3,7593\,\partial y_1 - 1,0986\,\partial y_2 - 3,8471\,k_1 + 3,6706\,k_2 \\ & + 0,1281\,h_3 + 1,7522\,p_1 + 2,6081\,p_2 - 4,9033\,p_3 \\ & - 1,2295\,k_3 - 3,4661\,q_1 - 2,2221\,q_2 + 1,5785\,q_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}83,56 = {} & 3,60\,\partial\varepsilon + 0,2714\,\partial x_1 - 0,9567\,\partial x_2 - 1,5602\,h_1 - 1,3924\,h_2 \\ & -91,84\,\partial n - 0,5116\,\partial y_1 - 2,7976\,\partial y_2 + 1,0937\,k_1 + 0,6112\,k_2 \\ & + 1,0027\,h_3 - 1,6385\,p_1 + 0,1802\,p_2 + 0,6529\,p_3 \\ & - 2,7879\,k_3 - 2,4746\,q_1 - 3,2736\,q_2 + 0,3113\,q_3.\end{aligned}$$

42. Si l'on élimine $\partial\varepsilon$ et ∂n au moyen de (ε) et (n) des articles **35** et **36**, ces équations deviennent

$$\begin{aligned}-361'',72 = {} & - 4,1831\,\partial x_1 + 0,6179\,\partial x_2 - 4,7839\,h_1 + 2,0969\,h_2 \\ & + 7,1533\,\partial y_1 - 1,5388\,\partial y_2 - 0,6909\,k_1 + 6,4242\,k_2 \\ & + 0,7410\,h_3 - 0,7000\,p_1 - 0,0153\,p_2 - 6,0258\,p_3 \\ & - 1,2508\,k_3 - 1,3068\,q_1 - 0,6369\,q_2 + 5,0525\,q_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-146,69 = {} & - 0,7686\,\partial x_1 - 0,1963\,\partial x_2 - 3,9519\,h_1 - 1,5548\,h_2 \\ & + 10,6926\,\partial y_1 - 4,2508\,\partial y_2 + 11,5128\,k_1 + 9,7013\,k_2 \\ & + 1,7907\,h_3 - 4,7913\,p_1 - 3,1927\,p_2 - 0,7902\,p_3 \\ & - 2,8583\,k_3 + 4,6536\,q_1 + 1,9595\,q_2 + 11,7796\,q_3,\end{aligned}$$

43. En substituant à ∂x_2, ∂y_2 leurs valeurs en termes de ∂x_1, ∂y_1, on trouve

$$\begin{aligned}& - 4,1831\,\partial x_1 + 7,1533\,\partial y_1 + 0,6179\,\partial x_2 - 1,5388\,\partial y_2 \\ & \quad = -4,1647\,\partial x_1 + 7,1473\,\partial y_1, \\ & - 0,7686\,\partial x_1 + 10,6926\,\partial y_1 - 0,1963\,\partial x_2 - 4,2508\,\partial y_2 \\ & \quad = -0,7319\,\partial x_1 + 10,6591\,\partial y_1.\end{aligned}$$

Donc, si aux équations que l'on vient de trouver on ajoute respectivement

$$+ 0,60808\,(x) - 5,5942\,(y)$$

et

$$+ 0,07306\,(x) - 8,3110\,(y),$$

δx_1 et δy_1 seront éliminés, et nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} -476'',84 = & -2,7630\,h_1 + 6,9793\,h_2 + 4,6473\,h_3 \\ & -2,8290\,k_1 - 5,1777\,k_2 - 20,2242\,k_3 \\ & +0,0698\,p_1 + 0,3785\,p_2 - 2,5884\,p_3 \\ & -1,7748\,q_1 - 0,8036\,q_2 - 0,2693\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} -486'',03 = & -3,7091\,h_1 - 0,9682\,h_2 + 2,2600\,h_3 \\ & +8,3364\,k_1 - 7,5348\,k_2 - 31,0457\,k_3 \\ & -4,6988\,p_1 - 3,1454\,p_2 - 0,3772\,p_3 \\ & +3,9584\,q_1 + 1,7118\,q_2 + 3,8734\,q_3. \end{aligned}\right.$$

44. Si l'on élimine les membres de gauche des équations (2), (3) et (4) des n^{os} **39** et **43**, au moyen de l'équation (1), on trouve

$$\begin{aligned} 0 = & 0,4200\,h_1 - 0,4114\,h_2 - 4,2014\,h_3 + 0,1980\,p_1 + 0,1069\,p_2 + 0,4236\,p_3 \\ & -0,4964\,k_1 + 2,3306\,k_2 + 23,3213\,k_3 - 0,1567\,q_1 - 0,0409\,q_2 - 0,4531\,q_3, \\ 0 = & -1,0507\,h_1 + 2,6465\,h_2 - 21,8182\,h_3 + 0,9482\,p_1 + 0,8614\,p_2 - 1,4023\,p_3 \\ & -2,7471\,k_1 - 4,7334\,k_2 - 19,4976\,k_3 - 1,7569\,q_1 - 0,7972\,q_2 - 0,0655\,q_3, \\ 0 = & -1,9638\,h_1 - 5,3845\,h_2 - 24,7155\,h_3 - 3,8034\,p_1 - 2,6532\,p_2 + 0,8317\,p_3 \\ & +8,4199\,k_1 - 7,0819\,k_2 - 30,3051\,k_3 + 3,9767\,q_1 + 1,7183\,q_2 + 4,0811\,q_3. \end{aligned}$$

45. Or si l'on pose, comme plus haut, $\varepsilon - \varepsilon' = \theta$, $\varepsilon - \varpi = \beta$, on voit que

$$\frac{h_1}{m'} = -42'',33 \sin\theta,\quad \frac{h_2}{m'} = 76'',55 \sin 2\theta,$$

$$\frac{k_1}{m'} = -42'',33 \cos\theta,\quad \frac{k_2}{m'} = 76'',55 \cos 2\theta,$$

$$\frac{h_3}{m'} = 7'',25 \sin 3\theta + 0,007460\,\frac{p_3}{m'} + 0,008974\,\frac{q_3}{m'},$$

$$\frac{k_3}{m'} = 7'',25 \cos 3\theta - 0,008974\,\frac{p_3}{m'} + 0,007460\,\frac{q_3}{m'},$$

$$\frac{p_1}{m'} = 0'',20 \sin(\theta - \beta) - 0,074738\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right),$$

$$\frac{q_1}{m'} = -\ 0'',20 \cos(\theta - \beta) + 0{,}074738\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right).$$

$$\frac{p_2}{m'} = \ 32'',91 \sin(2\theta - \beta) + 0{,}259765\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right).$$

$$\frac{q_2}{m'} = \ 32'',91 \cos(2\theta - \beta) + 0{,}259765\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right).$$

46. En substituant ces expressions dans les équations ci-dessus et en mettant à la place de β sa valeur $50^\circ\, 15',8$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 = &-(1{,}24872)\sin\theta + (1{,}32231)\cos\theta - (1{,}48110)\sin 2\theta + (2{,}24265)\cos 2\theta \\
&-(1{,}48373)\sin 3\theta + (2{,}22809)\cos 3\theta + (9{,}26254)\frac{p_3}{m'} - (9{,}50079)\frac{q_3}{m'} \\
&+(8{,}44376)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) - (8{,}02630)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&-(8{,}17031)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) - (8{,}06861)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = &\ (1{,}65190)\sin\theta + (2{,}06584)\cos\theta + (2{,}30220)\sin 2\theta - (2{,}60306)\cos 2\theta \\
&-(2{,}19916)\sin 3\theta - (2{,}15032)\cos 3\theta - (0{,}14305)\frac{p_3}{m'} - (9{,}60933)\frac{q_3}{m'} \\
&+(9{,}34981)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) - (9{,}31615)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&-(8{,}85046)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) - (9{,}11828)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = &\ (1{,}91407)\sin\theta - (2{,}55189)\cos\theta - (2{,}62790)\sin 2\theta - (2{,}64230)\cos 2\theta \\
&-(2{,}25331)\sin 3\theta - (2{,}34185)\cos 3\theta + (9{,}96344)\frac{p_3}{m'} + (0{,}56029)\frac{q_3}{m'} \\
&-(9{,}83835)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) + (9{,}64968)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&+(9{,}45371)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) + (9{,}47306)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right),
\end{aligned}$$

où les nombres compris entre parenthèses indiquent les logarithmes des coefficients correspondants, comme ci-dessus.

47. De ces équations nous déduisons, par la même méthode qu'auparavant,

$$\theta = -46^\circ 55', \quad \frac{p_3}{m'} = 138'',92, \quad \frac{q_3}{m'} = -109'',83.$$

Donc, puisque ε est égal à $217^\circ 55'$, la longitude moyenne de la planète perturbatrice en 1810, 328 est $\varepsilon' = 264^\circ 50'$; le mouvement sidéral, en 36 périodes synodiques d'Uranus, est égal à $57^\circ 42'$, et la précession est de $30'$; donc la longitude moyenne en 1846, 762 (6 octobre) est de $323^\circ 2'$.

De plus, les expressions pour $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$ sont

$$\frac{p_3}{m'} = 33'',93 \sin(3\theta - \beta) - 63'',41 e' \sin(3\theta - \beta'),$$

$$\frac{q_3}{m'} = 33'',93 \cos(3\theta - \beta) - 63'',41 e' \cos(3\theta - \beta'),$$

où $\varepsilon - \varpi' = \beta'$.

Si nous comparons ces expressions aux valeurs données plus haut, nous trouverons que $e' = 2,4123$, $\beta' = 279^\circ 14'$. Donc $\varpi' = 298^\circ 41'$, et la longitude du périhélie en 1846 est $299^\circ 11'$.

Enfin, si l'on substitue les valeurs que l'on vient d'obtenir dans l'équation (1) du n° **39**, on trouve $m' = 0,75017$.

48. Voici donc les valeurs de la masse et des éléments de l'orbite de la planète perturbatrice, résultant de la seconde hypothèse relative à la distance moyenne :

$$\frac{a}{a'} = 0,515.$$

Longitude moyenne de la planète, au 6 octobre 1846 ...	323° 2′
Longitude du périhélie.	299° 11′
Excentricité de l'orbite.........................	0,120615
Masse (celle du Soleil étant l'unité)...............	0,00015003

49. Des valeurs de m', θ, $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$ trouvées plus haut, on déduit immédiatement les valeurs des quantités h, k, p et q, qui correspondent à chaque hypothèse. Ainsi nous trouvons :

Première hypothèse : $\frac{a}{a'} = 0,5.$		Deuxième hypothèse : $\frac{a}{a'} = 0,515.$	
$h_1 = 23'',98$	$k_1 = -19'',07$	$h_1 = 23'',19$	$k_1 = -21'',69$
$h_2 = -47,58$	$k_2 = -11,00$	$h_2 = -57,30$	$k_2 = -3,83$
$h_3 = -1,93$	$k_3 = -7,64$	$h_3 = -3,40$	$k_3 = -5,76$
$p_1 = 9,93$	$q_1 = -8,31$	$p_1 = 6,52$	$q_1 = -7,34$
$p_2 = -8,54$	$q_2 = -55,36$	$p_2 = -11,62$	$q_2 = -54,39$
$p_3 = 224,90$	$q_3 = -171,63$	$p_3 = 104,21$	$q_3 = -82,39$

50. En substituant ces valeurs dans les équations (ε), (n), (x) et (y), nous obtenons :

Première hypothèse : $\frac{a}{a'} = 0,5.$		Deuxième hypothèse : $\frac{a}{a'} = 0.515.$	
$\delta\varepsilon = -49'',77$	$\delta n = -0'',702$	$\delta\varepsilon = -43'',23$	$\delta n = -0'',5417$
$\delta x_1 = -130,69$	$\delta y_1 = 222,38$	$\delta x_1 = 1,77$	$\delta y_1 = 123,98$
$\delta x_2 = 1,02$	$\delta y_2 = 2,83$	$\delta x_2 = 1,13$	$\delta y_2 = 0,91$

et les corrections correspondantes des éléments elliptiques seront

$\frac{\delta a}{a} = 0,00000999$	$\frac{\delta a}{a} = 0,00000771$
$\delta e = 20'',83$	$\delta e = 40'',31$
$e\delta\varpi = 127,27$	$e\delta\varpi = 47,10$

On verra que les corrections de l'excentricité et de la longitude du périhélie varient très-rapidement dès qu'on modifie la distance moyenne présumée.

51. Si ces quantités sont substituées dans les expressions données plus haut, nous obtiendrons les corrections théoriques suivantes de la longitude moyenne, chacune de ces corrections étant divisée en deux parties, dont la première est due aux changements dans les éléments de l'orbite d'Uranus, et la seconde à l'action de la planète perturbatrice.

Première hypothèse.

Années.	Observations anciennes.
1712 ..	− 288″,0 + 365″,8 = + 77″,8
1715. .	− 283,1 + 357,1 = + 74,0
1750...	+ 210,5 − 260,7 = − 50,2
1753 ..	+ 218,1 − 267,0 = − 48,9
1756...	+ 214,0 − 260,0 = − 46,0
1764...	+ 154,0 − 186,7 = − 32,7
1769. .	+ 79,6 − 100,7 = − 21,1
1771...	+ 27,6 − 41,8 = − 14,2

Années.	Observations modernes.
1780...	− 126″,12 + 129″,27 = + 3″,15
1783. .	− 180,28 + 188,70 = + 8,42
1786...	− 227,66 + 240,36 = + 12,70
1789...	− 265,70 + 281,63 = + 15,93
1792. .	− 292,25 + 310,38 = + 18,13
1795...	− 305,84 + 325,27 = + 19,43
1798...	− 305,67 + 325,72 = + 20,05
1801...	− 291,77 + 312,05 = + 20,28
1804...	− 264,95 + 285,38 = + 20,43
1807...	− 226,78 + 247,51 = + 20,73
1810...	− 179,43 + 200,76 = + 21,33
1813...	− 125,59 + 147,72 = + 22,13
1816..	− 68,21 + 91,02 = + 22,81
1819...	− 10,40 + 33,18 = + 22,78
1822...	+ 44,84 − 23,64 = + 21,20
1825...	+ 94,69 − 77,64 = + 17,05
1828...	+ 136,73 − 127,48 = + 9,25
1831...	+ 168,94 − 172,17 = − 3,23
1834...	+ 189,85 − 211,04 = − 21,19
1837...	+ 198,51 − 243,59 = − 45,08
1840...	+ 194,54 − 269,36 = − 74,82

Deuxième hypothèse.

Années.	Observations anciennes.
1712..	− 133″,7 + 211″,9 = + 78″,2
1715...	− 117,7 + 191,5 = + 73,8
1750. .	+ 85,2 − 134,4 = − 49,2
1753...	+ 73,8 − 122,2 = − 48,4
1756...	+ 59,1 − 105,2 = − 46,1
1764...	+ 2,7 − 36,4 = − 33,7
1769...	− 43,1 + 20,8 = − 22,3
1771 ..	− 69,9 + 54,7 = − 15,2

Années.	Observations modernes.
1780...	− 133″,10 + 135″,98 = + 2″,88
1783. .	− 149,47 + 157,87 = + 8,40
1786...	− 160,15 + 172,99 = + 12,84
1789...	− 164,52 + 180,64 = + 16,12
1792...	− 162,30 + 180,58 = + 18,28
1795...	− 153,59 + 173,07 = + 19,48
1798 ..	− 138,87 + 158,86 = + 19,99
1801...	− 118,95 + 139,08 = + 20,13
1804...	− 94,96 + 115,21 = + 20,25
1807...	− 68,25 + 88,85 = + 20,60
1810...	− 40,33 + 61,61 = + 21,28
1813...	− 12,72 + 34,91 = + 22,19
1816...	+ 13,08 + 9,88 = + 22,96
1819 ..	+ 35,71 − 12,74 = + 22,97
1822...	+ 54,04 − 32,68 = + 21,36
1825...	+ 67,18 − 50,08 = + 17,10
1828...	+ 74,52 − 65,37 = + 9,15
1831...	+ 75,74 − 79,21 = − 3,47
1834 ..	+ 70,85 − 92,31 = − 21,46
1837...	+ 60,08 − 105,25 = − 45,17
1840...	+ 43,98 − 118,38 = − 74,40

52. Si nous comparons ces résultats aux corrections de longitude moyenne, provenant de l'observation, nous trouverons les différences suivantes :

Observations anciennes.

Années.	Observation — Calcul. 1re hypoth.	2e hypoth.
1712....	$+6'',7$	$+6'',3$
1715....	$-6,8$	$-6,6$
1750....	$-1,6$	$-2,6$
1753....	$+5,7$	$+5,2$
1756....	$-4,1$	$-4,0$
1764....	$-5,1$	$-4,1$
1769....	$+0,6$	$+1,8$
1771....	$+11,8$	$+12,8$

Observations modernes.

Années.	Observation — Calcul. 1re hypoth.	2e hypoth.
1780...	$+0'',27$	$+0'',54$
1783...	$-0,23$	$-0,21$
1786...	$-0,96$	$-1,10$
1789...	$+1,82$	$+1,63$
1792...	$-0,91$	$-1,06$
1795...	$+0,09$	$+0,04$
1798...	$-0,99$	$-0,93$
1801...	$-0,04$	$+0,11$
1804...	$+1,76$	$+1,94$
1807...	$-0,21$	$-0,08$
1810...	$+0,56$	$+0,61$
1813...	$-0,94$	$-1,00$
1816...	$-0,31$	$-0,46$
1819...	$-2,00$	$-2,19$
1822...	$+0,30$	$+0,14$
1825...	$+1,92$	$+1,87$
1828...	$+2,25$	$+2,35$
1831...	$-1,06$	$-0,82$
1834...	$-1,44$	$-1,17$
1837...	$-1,62$	$-1,53$
1840...	$+1,73$	$+1,31$

La plus grande différence dans la Table qui précède, c'est-à-dire celle de 1771, provient d'une observation unique, tandis que la différence qui la précède immédiatement, et qui est la résultante de plusieurs observations, est très faible.

53. Les résultats des deux théories concordent bien ensemble et correspondent avec l'observation tant que nous ne sommes pas arrivés aux dernières années de la série, et il est à remarquer que la différence entre les théories devient sensible précisément au point où toutes deux

montrent des symptômes de divergence avec les observations; toutefois les erreurs de la seconde hypothèse sont moindres que celles de la première.

Des observations récentes montrent que les erreurs de la théorie ne tardent pas à devenir très-sensibles, bien que décidément moindres pour la seconde hypothèse que pour la première. Voici les différences de longitude moyenne, déduites de la théorie et de l'observation pour les oppositions de 1843, 1844 et 1845 :

	Observation — Calcul.	
Années.	1re hypothèse.	2e hypothèse.
1843..............	$+\ 7'',11$	$+\ 5'',77$
1844	$+\ 8,79$	$+\ 7,05$
1845..............	$+12,40$	$+10,18$

Pour les observations des deux dernières années, j'ai fort à me louer de l'obligeance de l'Astronome royal. Les trois années s'accordent presque pour prouver que les erreurs de la première hypothèse sont à celles de la seconde dans le rapport de 5 à 4, d'où j'inférai, dans une Lettre à l'Astronome royal, datée du 2 septembre 1846, que l'hypothèse de $\frac{a}{a'} = \sin 35^\circ = 0,574$ satisferait probablement à toutes les observations, à très-peu de chose près.

54. Les résultats que j'ai déduits des observations de la planète faites par le professeur Challis confirment pleinement l'idée que la distance moyenne devrait être considérablement diminuée. Il est naturellement impossible de préciser, sans un calcul exact, le changement de longitude qui serait produit par une semblable diminution de distance. En comparant les valeurs de θ données par les deux hypothèses, on verra toutefois que, si nous prenions successivement des valeurs plus faibles pour la distance moyenne, les valeurs trouvées pour la longitude moyenne en 1810 iraient probablement toujours en diminuant, tandis que simultanément le mouvement moyen de 1810 à 1846 augmenterait rapidement, de sorte que les valeurs correspondantes de la longitude moyenne en ce moment arriveraient probablement bientôt à un minimum pour recommencer plus tard à croître. Je pense que c'est là la raison pour laquelle la longitude, trouvée sur la supposition d'une trop grande valeur pour la distance moyenne, concorde d'une manière presque complète avec l'observation. Pour n'avoir pas accordé suffisamment à l'accroissement du mouvement moyen, je me pressai trop, dans ma Lettre précitée à l'Astronome royal, de conclure que l'effet de la diminution de la distance moyenne serait de diminuer la longitude moyenne.

55. J'ai déjà dit que je ne croyais pas devoir employer l'observation de Flamsteed, en 1690, pour former les équations de condition, parce que l'intervalle entre elle et toutes les autres est trop grand. La différence entre cette observation et la théorie paraît être considérable et plus grande pour la seconde hypothèse que pour la première, les erreurs étant respectivement $+44'',5$ et $+50'',0$. Ces erreurs s'accroîtraient probablement, si l'on diminuait la distance moyenne. Il serait à désirer que l'on examinât les manuscrits de Flamsteed relativement à ce point.

56. Les corrections du rayon vecteur tabulaire d'Uranus peuvent aisément se déduire de celles de la longitude moyenne, à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta r}{r} = {} & \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}\,\delta\zeta - \frac{1}{2n}\frac{d}{dt}\,\delta\zeta + \frac{1}{4}\frac{\delta a}{a} - \frac{1}{2}\frac{e\,\delta e}{1-e^2} - \frac{1}{6}m'a^2\frac{dA_0}{da} \\
& + \frac{m'}{2}\Sigma C_i \cos i\,(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + m'e\,\Sigma D_i \cos\left[i\,(nt - n't + \varepsilon' - \varepsilon') - nt - \varepsilon + \varpi\right] \\
& + m'e'\,\Sigma E_i \cos\left[i\,(nt - n't + \varepsilon' - \varepsilon') - nt - \varepsilon + \varpi'\right],
\end{aligned}$$

où $\delta\zeta$ indique l'entière correction de la longitude moyenne au temps t,

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varepsilon} = e\sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{3e^2}{2}\sin 2\,(nt + \varepsilon - \varpi),$$

$$C_i = \frac{1}{2}\,\frac{n}{n-n'}\,a A_i,$$

$$D_i = -\frac{1}{4}\,\frac{in}{i(n-n')-n}\left(2iaA_i + a^2\frac{dA_i}{da}\right).$$

$$E_i = \frac{1}{4}\,\frac{(i-1)n}{i(n-n')-n}\left|(2i-1)\,aA_{i-1} + a^2\frac{dA_{i-1}}{da}\right|.$$

i prenant toutes les valeurs intégrales positives et négatives, non compris zéro.

57. En substituant dans cette formule les valeurs de m', δa, δe,... déjà obtenues et en mettant $a = 19{,}191$, on trouve les résultats suivants, correspondant aux deux valeurs adoptées de la distance moyenne :

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{r}\delta r = \frac{a}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}\delta\zeta - \frac{a}{2}\frac{d\delta\zeta}{n\,dt} & - 0{,}000089 \\
& + 0{,}000069\cos\ \ (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + 0{,}000259\cos 2(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + 0{,}000109\cos 3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + 0{,}000016\cos\ \ (n't + \varepsilon' - \varpi) \\
& - 0{,}000168\cos\ \ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\
& + 0{,}000078\cos\ \ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\
& - 0{,}000049\cos\ \ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi) \\
& + 0{,}000209\cos\ \ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi')
\end{aligned}$$

SECONDE HYPOTHÈSE.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{r}\delta r = \frac{a}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}\delta\zeta - \frac{a}{2}\frac{d\delta\zeta}{n\,dt} & - 0{,}000144 \\
& + 0{,}000073\cos\ \ (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + 0{,}000266\cos 2(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + 0{,}000115\cos 3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + 0{,}000016\cos\ \ (n't + \varepsilon' - \varpi) \\
& - 0{,}000188\cos\ \ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\
& + 0{,}000068\cos\ \ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\
& - 0{,}000053\cos\ \ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi) \\
& + 0{,}000165\cos\ \ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi'),
\end{aligned}$$

58. Voici les valeurs de $\delta\zeta$ et $\frac{d\delta\zeta}{dt}$ pour quelques-unes des dernières années.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

Années.	$\delta\zeta$	$\frac{d\delta\zeta}{dt}$
1834.........	$-21'',19$	$-20'',93$
1840.........	$-74,82$	$-32,34$
1846.........	$-148,65$	$-39,94$

SECONDE HYPOTHÈSE.

1834.........	$-21'',46$	$-20,85$
1840.........	$-74,40$	$-31,62$
1846.........	$-145,91$	$-38,30$

De là, au moyen des formules ci-dessus, nous trouvons comme corrections du rayon vecteur tabulaire :

Années.	Première hypothèse.	Seconde hypothèse.
1834......	$+0,00505$	$+0,00492$
1840......	$+0,00722$	$+0,00696$
1846......	$+0,00868$	$+0,00825$

59. La partie de beaucoup la plus importante de ces corrections se rapporte au terme $-\frac{1}{2}r\frac{d\delta\zeta}{n\,dt}$, et peut par conséquent être immédiatement déduite d'une comparaison entre le mouvement angulaire d'Uranus dû à l'observation et celui qui est donné par les Tables. Effectivement, les corrections données par ce terme seul, pour les époques mentionnées ci-dessus, sont

Années.	Première hypothèse.	Seconde hypothèse.
1834......	$+0,00447$	$+0,00445$
1840......	$+0,00694$	$+0,00678$
1846......	$+0,00853$	$+0,00818$

lesquelles, comme nous le voyons, diffèrent très-peu des valeurs complètes que nous venons de trouver. La correction pour 1834 s'accorde presque entièrement avec celle que M. Airy a déduite de l'observation dans les *Astronomische Nachrichten*. Les corrections pour les années suivantes sont un peu plus fortes que celles qui sont données par les observations de Greenwich, les résultats de la seconde hypothèse étant, comme dans le cas de la longitude, plus rapprochés de la vérité que ceux de la première.

60. J'ai fait quelques tentatives, en discutant les observations de latitude, pour trouver des valeurs approximatives de la longitude du nœud et de l'inclinaison de l'orbite de la planète perturbatrice; mais les résultats n'en ont pas été satisfaisants. Les perturbations de la latitude sont, en effet, très-faibles, et, durant la période comparativement courte des trois quarts d'une révolution, elles se confondent presque avec les effets d'un changement constant dans l'inclinaison et la position du nœud d'Uranus, de sorte que de très-faibles erreurs dans les observations peuvent entièrement vicier le résultat.

61. Les perturbations de Saturne produites par la nouvelle planète, quoique faibles, seront encore sensibles, et il y aurait de l'intérêt à rechercher si, en en tenant compte, les valeurs des masses de Jupiter et d'Uranus, trouvées par leur action sur Saturne, seraient plus conformes avec celles qui ont été déterminées par d'autres moyens qu'elles ne semblent l'être pour le moment. La réduction des observations planétaires de Greenwich rend une pareille recherche comparativement facile, et il faut espérer que les astronomes anglais ne seront pas les derniers à utiliser les trésors d'observation ainsi ouverts au monde.

APPENDICE.

Bessel a inséré au n° 48 des *Astronomische Nachrichten*, t. II, p. 441, une Lettre qui est accompagnée d'une note explicative se rapportant à ses Tables d'Uranus et émanant de Bouvard lui-même.

Il résulte évidemment des remarques I, II, III de M. Le Verrier, aux pages 92-94 de son Mémoire sur les perturbations d'Uranus, qu'il n'avait pas connaissance de ces Lettres de Bessel et Bouvard : car elles auraient fait disparaître la plupart des doutes qu'il y exprime relativement aux Tables de ce dernier. Il aurait vu, par exemple, que la correction $2\delta e$, qu'il suppose pouvoir s'élever à 100 secondes sexagésimales, n'était réellement que d'environ 10 secondes centésimales. Au haut de la page 90 de son Mémoire, M. Le Verrier remarque, avec beaucoup de justesse, qu'une erreur dans l'inégalité d'une longue période n'a pas d'importance pour l'objet en vue; mais il aurait dû aussi remarquer qu'une erreur dans une inégalité, dont la période était presque égale à celle d'Uranus, serait pareillement presque insignifiante, puisque l'effet de cette erreur, durant le temps pendant lequel Uranus a été observé, serait, à peu de chose près, représenté par une correction constante appliquée à l'excentricité et à la longitude du périhélie, comme je l'ai dit à la fin du n° 7 de mon Mémoire.

J'attache une très-grande importance à la remarque faite au n° 9, relativement à l'avantage d'employer la correction de la longitude moyenne au lieu de celle de la longitude vraie. M. Hansen a fortement insisté sur ce point dans sa *Théorie de la Lune* et dans ses autres ouvrages.

Par suite de cela, les termes qui sont nécessairement omis dans une première approximation sont plus faibles que si l'on avait employé les perturbations de la longitude vraie.

Je vais maintenant faire un petit nombre de remarques, en réponse aux objections de M. le professeur Pierce, contre la légitimité du procédé suivi, tant par M. Le Verrier que par moi-même, pour la solution de notre problème. Le professeur Pierce prétend que la période de notre planète hypothétique diffère si considérablement de celle de Neptune, que l'on pourrait indiquer quelques périodes intermédiaires, lesquelles seraient exactement commensurables avec la période d'Uranus, et qu'il y aurait une solution de continuité dans les perturbations d'Uranus, causée par deux planètes hypothétiques, dont l'une aurait une plus grande période et l'autre une période plus petite que la période commensurable dont il vient d'être question. De plus, la période de Neptune lui-même est. à très-peu de chose près, double de celle d'Uranus, et cette circonstance donne naissance à des perturbations réciproques très-considérables, d'un caractère tout à fait différent de celles qui seraient causées par nos planètes hypothétiques.

Peu de mots, à mon avis, suffiront pour aplanir cette difficulté. Il est vrai que, si nous voulions représenter les perturbations d'Uranus causées par une planète supérieure, pendant deux ou plusieurs périodes synodiques, cela ne pourrait se faire qu'en adoptant une période approximativement vraie pour la planète perturbatrice; mais le cas est différent lorsque, comme ici, nous n'avons à représenter que les perturbations produites durant une fraction d'une période synodique.

Dans ce cas, si nous prenions pour quantités inconnues, non les corrections applicables aux éléments moyens de l'orbite d'Uranus, mais celles qui seraient applicables aux éléments adoptés pour l'époque de 1810, par exemple, alors toutes les considérations relatives à une commensurabilité approximative dans les deux périodes, deviendraient étrangères à la question, et les perturbations pour l'intervalle limité requis pourraient être représentées approximativement, pourvu que les forces perturbatrices de la planète réelle et de la planète présumée fussent approximativement les mêmes en grandeur et en direction, durant le temps où ces forces perturbatrices agiraient avec la plus grande intensité, c'est-à-dire lorsque les planètes ne seraient pas fort éloignées de leur conjonction. Sir John Herschel a montré dans ses *Outlines of Astronomy* que ces conditions sont remplies d'une manière satisfaisante par les planètes hypothétiques de M. Le Verrier et de moi-même, quand leur action est comparée à celle de Neptune.

On ne devait attacher aucune valeur à la forte excentricité ni à la longitude de l'apside de l'orbite de la planète présumée, si ce n'est en tant qu'elles fournissaient les moyens d'approcher de plus près de la distance actuelle et du mouvement angulaire du corps perturbateur, dans l'intervalle où l'action perturbatrice se faisait le plus sentir.

Ainsi donc, de la circonstance que le périhélie de la planète présumée sortit du premier calcul, non loin de la ligne de conjonction, on aurait pu raisonnablement conclure, ce qu'a donné en effet le second calcul, que l'hypothèse d'une plus faible valeur de la distance moyenne conduirait à une valeur plus faible de l'excentricité.

On fera bien aussi de remarquer que les grands changements dans les valeurs de δe et $e\delta\varpi$, qui se trouvent, dans le n° **30**, résultant de la transition de ma première à ma seconde hypothèse, sont des changements dans les valeurs des éléments moyens de l'orbite d'Uranus, lesquels sont grandement affectés par l'inégalité de la longitude moyenne avec les coefficients p_3 et q_3, dont la période ne diffère pas beaucoup de celle d'Uranus, particulièrement pour le cas de la première hypothèse. On verra que $\delta x_1 + p_3$ et $\delta y_1 + q_3$ varient bien moins en passant d'une hypothèse à l'autre que δx_1 et δy_1. Nous avons donc :

Première hypothèse.	Seconde hypothèse.
$\delta x_1 + p_3 = 94'',21$	$\delta x_1 + p_3 = 105'',98$
$\delta y_1 + q_3 = 50,75$	$\delta y_1 + q_3 = 41,59$

Et les corrections des éléments adoptés, à l'époque de 1810, seront approximativement déduites de ces quantités, absolument comme δe et $e\delta\varpi$ ont été formés de δx_1 et δy_1.

L'observation de Flamsteed, en 1690, remonte à une époque trop éloignée pour qu'elle puisse être bien représentée par les formules dont les résultats s'accordent assez bien avec ceux des observations plus récentes.

Ma seconde hypothèse a donné une erreur plus forte que la première. C'est donc probablement pour avoir eu trop de confiance dans la possibilité d'appliquer ses formules à cette observation ancienne, que M. Le Verrier s'est trouvé amené à fixer une limite inférieure à la distance moyenne de sa planète perturbatrice, laquelle ne concorde pas avec la distance moyenne de Neptune, telle qu'elle a été observée.

J.-C. Adams

Cambridge, le 7 septembre 1875.

Sur une série de courbes analogues aux développées;

PAR M. HALPHEN.

L'étude des fonctions abéliennes et des théories géométriques qui s'y rattachent a fait accorder une attention particulière aux transformations *uniformes*. On entend par là les transformations qui changent une courbe algébrique en une autre lui correspondant *point par point*. Il en est qui jouissent d'une propriété spéciale et importante : elles conduisent d'une courbe ayant des singularités quelconques à une transformée qui ne possède que des singularités ordinaires (*). L'objet de ce Mémoire est l'étude d'une transformation uniforme particulière, de définition géométrique, jouissant de cette propriété.

Soit S une courbe plane et algébrique qu'il s'agit de transformer. Je prends une conique arbitraire, dans le même plan. Je considère un point de S, la tangente en ce point, et enfin la polaire du même point relativement à la conique. L'intersection de cette tangente et de cette polaire engendre une courbe S^1, qui est une transformée de S et lui correspond point par point. Par la même construction, on déduit de S^1 une nouvelle transformée S^2, et ainsi de suite. Une courbe quelconque S^i de cette série correspond point par point à la courbe initiale S. Je prouverai dans ce Mémoire que, quelle que soit la courbe S, il existe toujours un nombre fini et déterminé, tel que toutes les transformées S^i, de rang supérieur à ce nombre, ne possèdent que des singularités ordinaires. Ainsi la transformation géométrique très-simple, par laquelle on passe de S à S^1, répétée un nombre fini de fois, constitue une transformation uniforme jouissant de la propriété demandée.

La courbe S^1 a déjà été considérée à d'autres points de vue, notam-

(*) *Voir*, à ce sujet, deux Notes : l'une de M. Nöther (*Gœtt. Nachr.*, 1871), l'autre de l'Auteur du présent Mémoire (*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 638).

ment par M. Laguerre. Au lieu de la figure formée par S et S^1, que l'on envisage une figure corrélative Σ, Σ^1. La courbe Σ^1 comprend, comme cas particulier, la développée de Σ. Par là, l'étude des courbes S^i se rattache à celle des développées successives d'une même courbe. J'ai eu déjà, dans un *Mémoire sur les points singuliers* (*), l'occasion de m'occuper de ces développées, et j'ai obtenu le théorème suivant : *A partir d'un certain rang, les degrés et les classes des développées successives d'une courbe algébrique plane quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison.* On verra, dans le Mémoire actuel, que les courbes S^i jouissent de propriétés analogues.

Ce travail se rattache encore au Mémoire précité, en ce que je m'y appuie sur plusieurs propriétés des points singuliers. Dans le § I, je rappelle ces propriétés, et je donne quelques formules nécessaires pour la suite. Ces formules sont utiles dans un grand nombre de questions analogues.

Dans le § II, j'étudie les points singuliers des courbes S^i, et je parviens au théorème principal, consistant en ce que ces courbes n'ont que des singularités ordinaires, pourvu que leur indice soit supérieur à une certaine limite.

Dans le § III, je détermine les degrés et les classes des courbes S^i : j'obtiens incidemment plusieurs résultats déjà connus, entre autres la formule qui donne explicitement le *genre* d'une courbe quelconque (**). Je trouve enfin une loi uniforme à laquelle les degrés et les classes des courbes S^i obéissent toujours, quelle que soit la courbe initiale, pourvu que l'indice i soit supérieur à la limite ci-dessus.

Enfin, dans le § IV, j'étudie les modifications que subissent les résultats précédents dans un cas particulier. J'en déduis, en le précisant et le complétant, le théorème rappelé plus haut, et qui concerne les développées.

(*) Ce Mémoire sera inséré au *Recueil des Savants étrangers* (Voir *Comptes rendus*, t. LXXX, p. 97).

(**) Voir *Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1833.

§ I.

1. Les considérations qui vont suivre ont pour point de départ une proposition relative aux fonctions algébriques, que l'on peut énoncer ainsi :

Soit y une fonction algébrique de x, et dont n valeurs s'évanouissent avec x : 1° pour une valeur infiniment petite de x, n valeurs de y sont infiniment petites ; 2° ces n valeurs de y se répartissent en groupes tels que, si Q est le nombre de ces valeurs contenues dans un quelconque de ces groupes, ces Q valeurs de y forment une seule et même fonction uniforme de $x^{\frac{1}{Q}}$ (*).

Ainsi s'introduit au sujet, soit des valeurs critiques des fonctions, soit des points singuliers des courbes algébriques, la considération de fonctions uniformes d'une puissance fractionnaire de la variable. C'est sur de telles fonctions que j'ai à donner ici quelques détails, en admettant comme connue la proposition ci-dessus.

Soit donc y une fonction uniforme de $x^{\frac{1}{Q}}$, s'évanouissant avec x. Pour de petites valeurs de x, y est développable en série suivant les puissances entières et positives de $x^{\frac{1}{Q}}$, c'est-à-dire suivant des puissances ascendantes et fractionnaires de x. Soit $\frac{p}{q}$ l'exposant de x dans le premier terme de la série, cet exposant étant réduit à sa plus simple expression : p et q sont deux entiers positifs, premiers entre eux, et qui peuvent être égaux à l'unité. En outre, q est un diviseur de Q. Je considère maintenant parmi les exposants suivants le premier de ceux qui, réduits à leur plus simple expression, n'aient pas pour dénominateurs q ou des diviseurs de q. Soit m_1 cet exposant ; je le mets sous la forme

$$m_1 = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1},$$

(*) Puiseux, *Mémoire sur les fonctions algébriques.* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XV.)

où p_1 et q_1 sont des entiers positifs, premiers entre eux, et dont le second ne peut être l'unité. En outre qq_1 est un diviseur de Q, car qq_1 est le plus petit dénominateur commun à $\frac{p}{q}$ et m_1. Je considère ensuite, parmi les exposants suivants, le premier de ceux qui, réduits à leur plus simple expression, n'aient pas pour dénominateurs qq_1 ou des diviseurs de qq_1. Soit m_2 cet exposant; je le mets sous la forme

$$m_2 = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1q_2},$$

ou p_2 et q_2 sont des entiers positifs, premiers entre eux, et dont le second ne peut être l'unité. En outre, qq_1q_2 est un diviseur de Q. En poursuivant de la sorte, je distingue une suite d'exposants de la forme

$$m_k = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1q_2} + \dots + \frac{p_k}{qq_1q_2\dots q_k},$$

où p_k et q_k sont deux entiers positifs, premiers entre eux, le second ne pouvant être l'unité; et, en outre, $qq_1q_2\dots q_k$ est toujours un diviseur de Q. Pour cette raison, le nombre de ces exposants est limité. Soit m_s le dernier d'entre eux. Les exposants de tous les termes suivants ont pour dénominateurs des diviseurs de $qq_1q_2\dots q_s = Q'$. Ainsi la série considérée est une fonction uniforme de $x^{\frac{1}{Q'}}$. On peut donc supposer $Q = Q'$. Les exposants $m_1, m_2, \dots, m_s$ jouent, dans beaucoup de questions, un rôle prépondérant. Souvent même ce sont les seuls éléments que l'on ait besoin de connaître relativement à la fonction y. Pour cette raison, j'emploie la notation suivante, qui m'a paru d'un usage commode. Par la relation

$$(1) \qquad y = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right](x),$$

j'indique que les exposants *caractéristiques* $m_1, m_2, \dots, m_s$, du développement de y suivant les puissances croissantes de x, sont formés au moyen des deux séries de nombres $p, p_1, \dots$ et $q, q_1, \dots$, d'après la règle

$$m_k = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1q_2} + \dots + \frac{p_k}{qq_1q_2\dots q_k}.$$

Outre les exposants caractéristiques, on a parfois besoin de considérer aussi les coefficients correspondants. J'indique alors ces coefficients *caractéristiques* en écrivant

$$(2)\qquad y = \left[(a)\frac{p}{q},\ (a_1)\frac{p_1}{q_1},\ (a_2)\frac{p_2}{q_2},\cdots,\ (a_s)\frac{p_s}{q_s} \right](x);$$

cette notation signifie que le terme d'exposant m_k est $a_k x^{m_k}$.

Si deux fonctions y et z de la variable x sont représentées par deux développements dont les exposants caractéristiques soient respectivement les mêmes, ainsi que les coefficients correspondants, je l'exprime abréviativement en écrivant $y \equiv z$.

2. Voici quelques formules relatives au calcul de l'algorithme (2), et dont il sera fait usage dans le cours de ce Mémoire. Je les donne sans démonstration ; le lecteur y suppléera sans difficulté. Ces formules sont relatives, les unes à une seule fonction, les autres à deux fonctions d'une même variable. Plusieurs d'entre elles sont susceptibles de généralisation ; il est entendu que je ne les donne ici que pour les cas dont j'ai besoin actuellement.

Soit y, représenté par la formule (2); on en déduit

$$(3)\qquad x\frac{dy}{dx} = \left[\left(\frac{p}{q}a\right)\frac{p}{q},\ (m_1 a_1)\frac{p_1}{q_1},\ (m_2 a_2)\frac{p_2}{q_2},\cdots,\ (m_s a_s)\frac{p_s}{q_s} \right](x),$$

$$(4)\qquad \begin{cases} y^m = x^{(m-1)\frac{p}{q}}\Bigg[(a^m)\dfrac{p}{q},\ (m a^{m-1} a_1)\dfrac{p_1}{q_1}, \\ \qquad\qquad (m a^{m-1} a_2)\dfrac{p_2}{q_2},\cdots,\ (m a^{m-1} a_s)\dfrac{p_s}{q_s} \Bigg](x), \end{cases}$$

$$(5)\qquad \frac{1}{1-y} \equiv 1 + y,$$

$$(6)\qquad x = \left[(b)\frac{q}{p},\ (b_1)\frac{p_1}{q_1},\ (b_2)\frac{p_2}{q_2},\cdots,\ (b_s)\frac{p_s}{q_s} \right](y),$$

avec les relations suivantes entre les coefficients $a,\ldots$ et $b,\ldots$:

$$(7)\qquad a^q b^p = 1,\quad \frac{p a b_k}{q b a_k} = a^{\frac{R_k}{p}},\quad (k = 1, 2,\ldots, s),$$

formule où l'on a posé

$$(8) \qquad R_k = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{p_k}{q_1 q_2 \ldots q_k}.$$

Les formules suivantes sont relatives à deux fonctions, y et z. La fonction y est toujours représentée par la formule (2); la fonction z est représentée par

$$(9) \qquad z = \left[(\alpha) \frac{\pi}{q}, (\alpha_1) \frac{\pi_1}{q_1}, (\alpha_2) \frac{\pi_2}{q_2}, \ldots, (\alpha_s) \frac{\pi_s}{q_s} \right] (x).$$

Il s'agit de mettre sous une forme analogue la somme, le produit et le quotient des deux fonctions; je ne considère ici que des cas particuliers :

1° Si l'on a

$$\pi > p, \quad \pi_1 \geqq p_1, \quad \pi_2 \geqq p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s \geqq p_s,$$

il en résulte

$$(10) \qquad y + z \equiv y.$$

2° Si l'on a

$$\pi = p, \quad \pi_1 = p_1, \quad \pi_2 = p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s = p_s,$$

il en résulte

$$(11) \quad y + z = \left[(a + \alpha) \frac{p}{q}, (a_1 + \alpha_1) \frac{p_1}{q_1}, (a_2 + \alpha_2) \frac{p_2}{q_2}, \ldots, (a_s + \alpha_s) \frac{p_s}{q_s} \right] (x),$$

sous la condition

$$\alpha_k + a_k \gtrless 0, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, s).$$

3° Si l'on a

$$\pi_1 > p_1, \quad \pi_2 \geqq p_2, \quad \pi_3 \geqq p_3, \quad \ldots, \quad \pi_s \geqq p_s,$$

il en résulte

$$(12) \qquad x^{-\frac{\pi}{q}} yz \equiv \alpha y,$$

$$(13) \qquad \alpha x^{\frac{\pi}{q}} \frac{y}{z} \equiv y.$$

4° Si l'on a

$$\pi_1 = p_1, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3, \quad \ldots, \quad \pi_s = p$$

il en résulte

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} x^{-\frac{\pi}{q}} yz = \Big[(a\alpha)\, \frac{p}{q},\ (\alpha_1 \alpha + a\alpha_1)\, \frac{p_1}{q_1}, \\ (a_2\alpha + a_2\alpha)\, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, (a_s\alpha + a\alpha_s)\, \frac{p_s}{q_s} \Big] (x), \end{aligned} \right.$$

sous la condition

$$a_k\alpha + a\alpha_k < 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

On a, en outre, pour le quotient des deux fonctions,

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 x^{\frac{\pi}{q}} \frac{y}{z} = \Big[(a\alpha)\, \frac{p}{q},\ (a_1\alpha - a\alpha_1)\, \frac{p_1}{q_1}, \\ (a_2\alpha - a\alpha_2)\, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, (a_s\alpha - a\alpha_s)\, \frac{p_s}{q_s} \Big] (x). \end{aligned} \right.$$

sous la condition

$$a_k\alpha - a\alpha_k \gtrless 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Les formules suivantes se rapportent au problème de l'élimination de x entre les équations (2) et (9), de manière à obtenir une relation entre y et z. Je ne considère que des cas particuliers.

1° Si l'on a

$$\pi_1 < p_1, \quad \pi_2 \leqq p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s \leqq p_s$$

il en résulte

$$(16)\quad z = \left[\left(\alpha a^{-\frac{\pi}{p}} \right) \frac{\pi}{p},\ (\alpha_1 a^{-t_1})\, \frac{\pi_1}{q_1},\ (\alpha_2 a^{-t_2})\, \frac{\pi_2}{q_2}, \ldots, (\alpha_s a^{-t_s})\, \frac{\pi_s}{q_s} \right] (y)$$

avec

$$t_k = \frac{\pi}{p} + \frac{\pi_1}{pq_1} + \frac{\pi_2}{pq_1q_2} + \ldots + \frac{\pi_k}{pq_1q_2\ldots q_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots s).$$

2° Le cas où l'on a

$$\pi_1 > p_1, \quad \pi_2 \geqq p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s \geqq p_s$$

se traitera aisément par l'emploi de la formule (16), en intervertissant les deux variables y et z.

3° Si l'on a

$$\pi_1 = p_1, \quad \pi_2 = p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s = p_s,$$

il en résulte

$$(17) \qquad z = \left[\left(\alpha a^{-\frac{\pi}{p}}\right)\frac{\pi}{p}, (\mathrm{A}_1)\frac{p_1}{q_1}, (\mathrm{A}_2)\frac{p_2}{q_2}, \ldots, (\mathrm{A}_s)\frac{p_s}{q_s}\right](y),$$

formule dans laquelle on a posé

$$(18) \qquad \mathrm{A}_k = \frac{a^{-t_k}}{pa}(pa\alpha_k - \pi\alpha a_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

L'exactitude de la formule (17) est d'ailleurs subordonnée à la condition

$$pa\alpha_k - \pi\alpha a_k \gtrless 0.$$

Enfin, si l'on considère une autre fonction u, qui ne diffère de y que par une fonction uniforme de x, commençant par un terme du premier degré

$$u = y - cx + \ldots$$

et que l'on ait

$$\pi_1 \leqq p_1, \quad \pi_2 \leqq p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s \leqq p_s,$$

il en résulte

$$(19) \qquad z = \left[\left(\alpha c^{-\frac{\pi}{q}}\right)\frac{\pi}{q}, \quad (\alpha_1 c^{-t_1})\frac{\pi_1}{q_1}, \quad (\alpha_2 c^{-t_2})\frac{\pi_2}{q_2}, \ldots, \quad (\alpha_s c^{-t_s})\frac{\pi_s}{q_s}\right](u).$$

5. Au point de vue algébrique, quand on considère la fonction y de la variable x comme une racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont rationnels en x, un développement, tel que celui qui est représenté par la relation (2), s'applique à un groupe de racines. Un tel groupe est désigné habituellement sous le nom de *système circulaire*.

Au point de vue géométrique, quand on considère x et y comme les coordonnées rectilignes d'un point d'une courbe, un développement, tel que celui qu'on vient d'envisager, s'applique à un groupe de branches de la courbe. Si le premier exposant $\frac{p}{q}$ est supérieur à l'unité, ces branches ont pour tangente commune, à l'origine, la droite $y=0$, et ont toutes avec cette droite des contacts d'ordre $\frac{p-q}{q}$. Le nombre de ces branches est $qq_1q_2\ldots q_s = Q$. Ce groupe de branches peut être appelé, comme je l'ai déjà fait en d'autres occasions, *système circulaire de branches*. Le nombre Q est l'*ordre de multiplicité* de ce système circulaire. On peut aussi, comme le fait M. Cayley, employer le nom de *branche superlinéaire*, en remplaçant cette désignation par celle de *branche linéaire* pour le cas où Q est l'unité. Le point aux environs duquel le développement (2) est applicable, et qui est ici l'origine des coordonnées, sera dit l'*origine* du système circulaire. On démontre aisément que les nombres caractéristiques de (2) restent les mêmes si l'on change l'axe des y. Ils seront dits les *nombres caractéristiques* du système circulaire de branches.

Si le premier exposant $\frac{p}{q}$ est inférieur à l'unité, l'équation

$$(20) \qquad y = \left[\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1}, \ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right](x)$$

représente des branches dont la tangente est l'axe des x. J'applique la formule (6), et j'ai

$$(21) \qquad x = \left[\frac{q}{p},\ \frac{p_1}{q_1}, \ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right](y).$$

L'équation (20), donnant lieu à (21), où $\frac{q}{p}$ est supérieur à l'unité, représente elle-même un système circulaire de $pq_1q_2\ldots q_s$ branches, dont les nombres caractéristiques sont $\frac{q}{p}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}$.

Enfin il reste à examiner le cas où $\frac{p}{q}$ est égal à l'unité, c'est-à-dire $p=q=1$. Soit a le coefficient du premier terme du développement (20), et changeons de variable en posant

$$y - ax = y'.$$

Le développement de y' suivant les puissances ascendantes de x commence par un terme de degré supérieur à l'unité. Pour connaître ce terme, il faudrait connaître dans (20) le second terme effectif.

D'une manière générale, on voit qu'il peut se présenter deux cas : 1° au second terme du développement (20), l'exposant de x est entier. Soit $n+1$ cet entier; on aura alors, pour le développement de y', la forme

$$(22)\qquad y' = \left[\frac{n+1}{1}, \quad \frac{p_1 - nq_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}\right](x).$$

Il est clair d'ailleurs que l'entier n est nécessairement inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$ par suite, ce cas ne peut se présenter si $\frac{p_1}{q_1}$ est inférieur à l'unité.

2° Au second terme du développement (20), l'exposant de x est fractionnaire. Cet exposant est alors $1 + \frac{p_1}{q_1}$, et l'on a

$$(23)\qquad y' = \left[\frac{p_1 + q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}\right](x).$$

Les équations (22) et (23) représentent toutes deux des systèmes circulaires de branches, dont l'ordre de multiplicité est le même, à savoir $Q = q_1 q_2 \ldots q_s$.

§ II.

4. Soient $S = 0$ et $C = 0$ les équations d'une courbe S et d'une conique C. Soit m un point de S. On considère la polaire de m relativement à C, et l'intersection m_1 de cette polaire et de la tangente à S en m. Le point m_1 engendre une transformée $S^{(1)}$ de S, dont l'étude fait l'objet de ce Mémoire.

Je cherche les expressions des coordonnées du point m_1. J'emploie des coordonnées homogènes x, y, z, les minuscules désignant les coordonnées de m, et les majuscules, les coordonnées courantes. En figurant les dérivées partielles par des indices, suivant l'usage, j'ai, pour les équations de la polaire de m et de la tangente en m à S

$$XC_1 + YC_2 + ZC_3 = 0,$$
$$XS_1 + YS_2 + ZS_3 = 0,$$

en sorte que les coordonnées de m_1, intersection de ces deux droites, sont proportionnelles aux déterminants du tableau

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

A cause de

$$S_1 x + S_2 y + S_3 z = 0,$$
$$S_1 dx + S_2 dy + S_3 dz = 0,$$

S_1, S_2, S_3 sont proportionnels aux déterminants du tableau

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}.$$

En observant, en outre, que l'on a

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 2C,$$
$$C_1 dx + C_2 dy + C_3 dz = dC,$$

on peut transformer les déterminants (1) comme il suit. On a

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = \frac{\lambda}{S_3} \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} dC & 2C \\ dz & z \end{vmatrix},$$

où λ désigne le rapport commun de S_1, S_2, S_3 aux déterminants (1).

Je dis qu'il résulte de là, pour les coordonnées de m_1,

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x\,dC - 2C\,dx}{dC}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{y\,dC - 2C\,dy}{dC}, \\[2ex] z_1 = \dfrac{z\,dC - 2C\,dz}{dC}. \end{cases}$$

En effet, d'après (2), ces coordonnées sont proportionnelles aux seconds membres de (3). Pour qu'elles leur soient égales, il suffit donc que ces seconds membres satisfassent à la relation linéaire qui lie les coordonnées homogènes x, y, z : c'est ce qu'il est très-aisé de vérifier.

Je transforme les numérateurs des seconds membres de (3) en prenant pour variable indépendante $\frac{x}{z}$, que je désigne par ξ, et, en même temps, $\frac{y}{z}$ par η. Posant

$$(4) \qquad \frac{x_1\, dC}{z^3\, d\xi} = \alpha, \quad \frac{y_1\, dC}{z^3\, d\xi} = \beta, \quad \frac{z_1\, dC}{z^3\, d\xi} = \gamma.$$

$$(5) \qquad 2C = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

on obtient aisément, en dénotant les dérivées par des accents,

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= -(a'' + b'\xi + b\eta) \quad + \xi^2(b + b''\xi + a'\eta)\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \beta &= -(a'' + b'\xi + b\eta)\eta' - \xi^2(b' + a\xi + b''\eta)\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \gamma &= \quad\;\; b' + a\xi + b''\eta \quad\;\; + \quad (b + b''\xi + a'\eta)\eta'. \end{aligned} \right.$$

Je vais faire usage des équations (6) de la manière suivante :

Je considérerai un système circulaire (S) de branches de la courbe S et j'étudierai le système circulaire (S'), qui lui correspond sur la transformée S'. A cet effet, je prendrai pour côté $y = 0$ et pour sommet $y = 0$, $x = 0$ du triangle de référence, la tangente et l'origine de (S). Le système circulaire (S) sera alors représenté par un développement tel que celui qui a été considéré plus haut (§ I, n° **1**); ce développement sera celui de η suivant les puissances de ξ. Je disposerai des autres indéterminées du triangle de référence de manière à simplifier les calculs. Pour cette raison, si la droite $y = 0$ n'est pas tangente à la conique de transformation C, et si, en outre, le point $y = 0$, $x = 0$ n'est pas sur cette conique, je prendrai pour triangle de référence le triangle conjugué relativement à C, qui est déterminé par les données précédentes. De cette façon l'origine du système circulaire (S') est au sommet $y = 0$, $z = 0$. Pour étudier ce système circulaire, on aura donc à considérer le développement d'un des rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, suivant les puissances ascendantes de l'autre. A cet effet, au moyen des formules (6), on calculera, suivant les formules données plus haut (§ I, n° 2), et au moyen du développement de η, les termes caractéristiques des développements de $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\alpha}$, suivant les puissances de ξ; puis, au moyen de l'une de ces formules, on en déduira les termes caractéristiques du développement cherché.

Dans les cas où le triangle de référence, assujetti aux premières conditions, ne peut être conjugué relativement à C, je le déterminerai de telle sorte que les calculs soient analogues. Je vais d'abord traiter le cas précédent.

5. Le triangle de référence étant conjugué relativement à la conique C, les coefficients b, b', b'' sont nuls. Les formules (6) se réduisent à

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -a'' + a'\xi^2\eta\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \beta &= -a''\eta' - a\xi^3\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \gamma &= a\xi + a'\eta\eta'. \end{aligned}\right.$$

Soit maintenant l'équation du système circulaire considéré

$$(8)\qquad \eta = \left(\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right)(\xi), \quad \frac{p}{q} > 1.$$

Pour calculer les termes caractéristiques des développements de α, β, γ, suivant les puissances ascendantes de ξ, on aura à appliquer quelques-unes des formules du n° 2. On en déduira les développements des rapports de β et γ à α, et l'on obtiendra les résultats suivants :

$$(9)\qquad \frac{\beta}{\alpha} \equiv \eta' = \left(\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right)(\xi),$$

$$(10)\qquad \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{a}{a''}\xi + \xi^{\frac{p}{q}}\left(\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right)(\xi).$$

Dans les formules (8), (9) et (10) je n'ai fait figurer que les nombres caractéristiques, en omettant les coefficients. On remarquera en effet, en effectuant les calculs, que, dans le cas actuel, il est inutile de considérer ces coefficients. La même circonstance a lieu dans l'opération qui reste à faire. On a, en dernier lieu, à déduire de (9) et (10) le développement de $\frac{\beta}{\alpha}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{\gamma}{\alpha}$, ou, du moins, les nombres caractéristiques de ce développement. Pour le faire, on n'a qu'à appliquer la formule (19) du n° **2**, et l'on obtient

$$(11)\qquad \frac{\beta}{\alpha}=\left(\frac{p-q}{q},\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\dots,\frac{p_s}{q_s}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Cette dernière formule permet d'étudier le système circulaire de branches (S^1) correspondant au système circulaire (S), représenté par la formule (8). Je veux, de cette formule, tirer des conséquences non-seulement pour la courbe S^1, mais encore pour les transformées successives $S^2, S^3, \dots$, que l'on obtient en appliquant successivement la même transformation à $S^2, S^3, \dots$. Je désignerai par $(S^2,)$ $(S^3), \dots$ les systèmes circulaires qui correspondent à (S), et qui sont sur ces courbes.

On passe de la formule (8) à la formule (11) en supposant que (S) n'a ni son origine ni sa tangente en commun avec la conique C de transformation. Je supposerai que la même condition soit remplie constamment pour (S^1), (S^2), ..., me réservant d'examiner plus loin le cas opposé. J'ai donc à appliquer plusieurs fois de suite le résultat contenu dans la formule (11).

Conformément aux résultats du n° **5** (§ I), les nombres caractéristiques du système circulaire (S^1), représenté par (11), sont

1° Si $\frac{p-q}{q}>1$ ou $p>2q$,

$$\frac{p-q}{q},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

2° Si $\frac{p-q}{q}<1$ ou $p<2q$,

$$\frac{q}{p-q},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

3° Si $\frac{p-q}{q}=1$ ou $p=2, q=1$,

$$\frac{n+1}{1},\quad \frac{p_1-nq_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s},\quad \text{ou}\quad \frac{p_1+q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

dans le troisième cas, n est un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$.

Je suppose, en premier lieu, $q = 1$ et $p > 2$. Alors le tableau des nombres caractéristiques de (S^1) ne diffère de celui de (S) qu'en ce que le premier de ces nombres est $(p-1)$ au lieu de p. En poursuivant, on parvient, pour $(S^{(p-2)})$, au tableau

$$\frac{2}{1},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Je vais montrer qu'on obtient un résultat analogue, si q diffère de l'unité. Pour fixer les idées, je suppose $p > 2q$. Le tableau des nombres caractéristiques de (S^1) ne diffère de celui de (S) que par le premier nombre qui, de $\frac{p}{q}$, devient $\frac{p-q}{q}$. Soit t l'entier contenu dans $\frac{p}{q}$; en poursuivant, on parvient, pour $(S^{(t-1)})$, au tableau

$$\frac{p-(t-1)q}{q},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Le premier nombre caractéristique est ici inférieur à 2; donc, comme on l'a vu plus haut, le tableau des nombres caractéristiques de (S^t) est

$$\frac{q}{p-tq},\quad \frac{p_1}{q_2},\quad \frac{p_2}{q_3},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

En répétant le même raisonnement, je forme une nouvelle suite analogue. J'observe maintenant que l'on a

$$\frac{p}{q} = t + \cfrac{1}{\cfrac{q}{p-tq}}.$$

Soit donc

$$\frac{p}{q} = t + \cfrac{1}{t' + \cdots + \cfrac{1}{t^r + \cfrac{\alpha}{\beta}}},$$

$t, t', \ldots, t^r$ étant des entiers positifs et $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction plus petite que l'unité. Il est clair que l'on trouve, pour le système circulaire correspondant à (S) et appartenant à la transformée de rang $(t + t' + \ldots + t^r)$, le tableau des nombres caractéristiques suivants :

$$\frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{p}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Enfin, soit le développement de $\frac{p}{q}$ en fraction continue ordinaire

$$\frac{p}{q} = t + \cfrac{1}{t' + \cfrac{1}{t'' + \ldots + \cfrac{1}{t^{k-1} + \cfrac{1}{t^k}}}};$$

$$t + t' + t'' + \ldots + t^{k-1} = \tau.$$

On a, pour (S^τ) le tableau

$$(12)\qquad \frac{t^k}{1},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

d'où je conclus, conformément à ce qui a été dit pour le cas où q est l'unité, que le tableau des nombres caractéristiques de $(S^{\tau+t^k-2})$ est

$$(13)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Je pose $\tau + t^k = T$, et j'ai cette conclusion : *Si le premier nombre caractéristique* $\frac{p}{q}$ *de* (S) *est différent de* 2, *et que* T *soit la somme des quotients incomplets de la fraction continue ordinaire égale à* $\frac{p}{q}$, *le système circulaire correspondant à* (S) *dans la transformée de rang* (T − 2) *a les mêmes nombres caractéristiques que* (S), *sauf que* $\frac{p}{q}$ *est remplacé par le nombre* 2. Je n'ai pas fait figurer, dans cet énoncé, la supposition $q > 1$, attendu que cet énoncé comprend le résultat acquis plus haut pour le cas où $q = 1$. Il comprend évidemment aussi le cas où $\frac{p}{q}$ est inférieur à 2, bien qu'on ait supposé d'abord $\frac{p}{q} > 2$.

Pour être à même de poursuivre cette étude, il faut maintenant s'occuper du cas où le premier nombre caractéristique est égal à 2 ; ce cas se présente pour (S^{T-2}), quand $\frac{p}{q}$ est différent de 2. Quand $\frac{p}{q}$ est égal à 2, il se présente pour (S); mais je puis encore employer la notation (S^{T-2}), puisque alors T est aussi égal à 2, et que, par suite, l'indice $(T-2)$ est égal à zéro.

Soit donc (13) le tableau des nombres caractéristiques de (S^{T-2}). Comme on l'a vu, celui de (S^{T-1}) sera de l'une des formes

$$\frac{p_1+q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

$$(14)\qquad \frac{n+1}{1},\quad \frac{p_1-nq_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

n étant un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$. Je suppose qu'il soit de la forme (14). Alors on parvient, pour le rang $(T-1)+(n+1)-2=T+n-2$, au tableau

$$(15)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1-nq_1}{q_1},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Je suppose encore que, au rang suivant, on obtienne un tableau analogue à (14), savoir :

$$\frac{n'+1}{1},\quad \frac{p_1-nq_1-n'q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

où n' est un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}-n$. On trouvera, au rang $(T+n+n'-2)$, le tableau

$$(16)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1-(n+n')q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Les mêmes choses se reproduiront de la sorte, tant qu'une fraction de dénominateur égal à q_1 ne passera pas au premier rang du tableau; mais ce fait se produira forcément. Le type des tableaux (15) et (16) est, en effet,

$$(17)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1-\nu q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

où ν est un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$ et qui croît constamment. Soit donc t_1

l'entier contenu dans $\frac{p_1}{q_1}$. Le nombre ν ne peut dépasser t_1. S'il l'atteint, on a, au rang $(T + t_1 - 2)$, le tableau

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{p_1 - t_1 q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}$$

et, comme $\frac{p_1 - (t_1 - 1) q_1}{q_1}$ est inférieur à l'unité, il en résulte, pour (S^{T+t_1-1}), le tableau

$$(18) \qquad \frac{p_1 - (t_1 - 1) q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Si, au contraire, ν n'atteint pas la valeur t_1, il arrive que, d'un tableau tel que (17), relatif à $(S^{T+\nu-2})$, on déduit, pour $(S^{T+\nu-1})$, le tableau

$$\frac{p_1 - (\nu - 1) q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s};$$

mais, de ce dernier, on déduira, en suivant une des règles ci-dessus, le tableau (18) pour le rang $T + \nu - 1 + (t_1 - \nu) = T + t_1 - 1$, c'est-à-dire pour le même rang que précédemment. Par conséquent, *dans tous les cas*, du tableau (13), relatif à (S^{T-2}), on est conduit au tableau (18) relatif à (S^{T+t_1-1}).

Mais maintenant le premier nombre caractéristique est différent de 2, puisque son dénominateur est différent de l'unité. On peut donc appliquer la proposition énoncée plus haut. Soit

$$\frac{p_1}{q_1} = t_1 + \cfrac{1}{t'_1 + \cdots + \cfrac{1}{t_1^{(k_1)}}}, \qquad t_1 + t'_1 + \ldots + t_1^{(k_1)} = T_1;$$

il en résulte

$$\frac{p_1 - (t_1 - 1) q_1}{q_1} = 1 + \cfrac{1}{t'_1 + \cdots + \cfrac{1}{t_1^{(k_1)}}}, \qquad 1 + t'_1 + \ldots + t_1^{(k_1)} = T_1 + 1 - t_1.$$

Par suite, au rang $(T + t_1 - 1) + (T_1 + 1 - t_1) - 2 = T + T_1 - 2$, on parviendra au tableau

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Il n'y a plus qu'à répéter les mêmes raisonnements pour parvenir à la conclusion suivante :

Si $T, T_1, T_2, \ldots, T_s$ sont les sommes des quotients incomplets des fractions continues ordinaires égales à $\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}$, le tableau des nombres caractéristiques relatifs à la transformée de rang

$$(T + T_1 + T_2 + \ldots + T_s - 2)$$

se réduit à $\frac{2}{1}$, c'est-à-dire que, sur cette transformée, au système circulaire considéré correspond une branche simple, ayant avec sa tangente un contact du premier ordre.

Mais il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à ce rang pour obtenir une branche simple. Soit, en effet, b le dernier quotient incomplet de $\frac{p_s}{q_s}$; on voit aisément qu'au système circulaire de rang $(T+T_1+\ldots+T_s-b)$ correspond un tableau réduit au seul nombre b. Ce système circulaire se réduit donc à une branche simple qui toutefois a, avec sa tangente, un contact d'ordre $(b-1)$, c'est-à-dire supérieur à l'unité si b est supérieur à 2.

En résumé, j'ai les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le nombre nécessaire et suffisant des transformations successives qui changent un système circulaire de branches en une branche simple est égal à la somme des quotients incomplets des fractions continues égales respectivement aux différents nombres caractéristiques de ce système circulaire, sauf toutefois le dernier quotient incomplet de la fraction continue égale au dernier nombre caractéristique.*

Théorème II. — *Le nombre nécessaire et suffisant des transformations successives qui changent un système circulaire de branches en une branche simple ayant avec sa tangente un contact du premier ordre est égal à la somme de tous les quotients incomplets des fractions continues précédentes, diminuée de deux unités.*

6. Ainsi que je l'ai fait observer au commencement du numéro précédent, l'exactitude des deux derniers théorèmes est soumise à une restriction. Les raisonnements qui y ont conduit et les théorèmes eux-mêmes cessent d'être exacts si, sur une des transformées considérées, le système circulaire correspondant à (S) a, soit son origine, soit sa tangente en commun avec la conique de transformation. On peut envisager la formation de ces courbes successives à deux points de vue différents : on peut employer, pour chaque nouvelle opération, une conique nouvelle, ou bien employer toujours la même. Dans le premier cas, on doit simplement compléter les théorèmes ci-dessus par cette restriction, que chaque conique doit être prise de manière à n'avoir en commun avec le système circulaire à transformer ni l'origine, ni la tangente. Dans le second cas, il faut examiner ce qui a lieu.

La condition restrictive étant supposée remplie pour (S), on a pris plus haut, pour triangle de référence, le triangle conjugué par rapport à C, dont le sommet $y=0$, $x=0$, et le côté $y=0$ sont l'origine et la tangente de (S). Cela étant, on a trouvé pour (S^1) l'équation (11). D'après cette équation, l'origine de S^1 est, dans tous les cas, le point $y=0$, $z=0$, qui n'est pas situé sur C. Donc, en premier lieu, l'origine de (S^1) n'est pas sur C. En outre, toujours d'après (11), si $\frac{p}{q}$ est différent de 2, la tangente de (S^1) est l'une des droites $y=0$ ou $z=0$, qui ne sont pas tangentes à C. Mais, si $\frac{p}{q}$ est égal à 2, la tangente de (S^1) peut être une droite quelconque passant en $y=0$, $z=0$, et cette droite peut être tangente à C. Ainsi la condition restrictive peut n'être pas satisfaite pour une transformée, si, dans la précédente, le système circulaire considéré a pour premier nombre caractéristique le nombre 2. Si cette circonstance se présente, on ne peut plus appliquer aux transformées suivantes les raisonnements du numéro précédent. Ces transformées obéissent alors à une loi que l'on trouvera dans la suite; mais il importe d'observer que, si l'on se propose d'obtenir au moyen de la transformation dont nous nous occupons, et avec l'emploi d'une seule conique, la réduction d'un système circulaire à une branche simple, on peut toujours y parvenir. Il suffit, en effet, de choisir la conique de manière qu'elle ne remplisse pas certaines conditions bien déterminées, et dont le nombre est limité.

Outre les résultats acquis au sujet des systèmes circulaires, et renfermés dans les théorèmes I et II, il est encore une conséquence simple, mais importante à tirer de l'équation (11), à savoir :

Théorème III. — *A toute branche simple dont ni l'origine ni la tangente n'appartient à la conique de transformation correspond, dans la transformée, une branche simple.*

Par suite des théorèmes I et III, on voit que, dans les transformées de rang supérieur à une certaine limite, il ne peut exister de branches superlinéaires que celles dont les correspondantes, dans quelques-unes des transformées précédentes, ont soit l'origine, soit la tangente en commun avec la conique de transformation. Je vais étudier maintenant ce qui est relatif à de telles branches.

Je prends toujours, pour le sommet $y = 0$, $x = 0$ et pour la droite $y = 0$, l'origine et la tangente du systeme circulaire (S), dont je veux étudier les transformées. Comme, par hypothèse, cette origine ou cette tangente appartient à la conique C, le triangle de référence ne peut être conjugué relativement à C. Je distinguerai trois cas :

Premier cas : *L'origine est sur la conique, et la tangente ne touche pas cette conique.* — Je complète le triangle de référence par les tangentes à C aux extrémités de la corde $y = 0$. J'ai alors

$$2C = a'y^2 + 2b'zx.$$

Deuxième cas : *L'origine n'est pas sur la conique, et la tangente touche la conique.* — Je complète le triangle de référence par la seconde tangente à C, issue de l'origine, et la polaire de ce point. J'ai alors

$$2C = a''z^2 + 2c''xy.$$

Troisième cas : *L'origine et la tangente appartiennent à la conique.* — Je peux, d'une infinité de manières, mettre C sous la forme

$$2C = ax^2 + 2byz.$$

7. J'étudie successivement ces trois cas.

PREMIER CAS : $2C = a'y^2 + 2b'zx$

Soit

$$(19) \qquad \eta = \left[(A)\frac{p}{q},\ (A_1)\frac{p_1}{q_1},\ (A_2)\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ (A_s)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi), \quad \frac{p}{q} > 1$$

le système circulaire considéré sur la courbe S. Un calcul facile permettra de déduire des formules (**6**), et au moyen des formules du n° **2** (§ I), les résultats suivants :

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha}{\gamma} &= -\xi + \frac{a'}{b'}\xi\left[\left(\frac{2p-q}{q}A^2\right)\frac{p}{q},\ \left(2\,\frac{2p-q+R}{q}AA_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ldots,\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left(2\,\frac{2p-q+R_s}{q}AA_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi), \\ \frac{\beta}{\gamma} &= -\left[\left(\frac{2p-q}{q}A\right)\frac{p}{q},\ \left(\frac{2p-q+R_1}{q}A_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \left(\frac{2p-q+R_s}{q}A_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi), \end{aligned} \right.$$

formules où l'on a posé, comme au n° **2** [formule (8)],

$$R_k = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{p_k}{q_1 q_2 \ldots q_k}.$$

De (20) je déduis, d'après la formule (19) du n° **2** (§ I),

$$\frac{\beta}{\gamma} = \left[\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1},\ \ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Cette dernière formule se traduit par le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *A un système circulaire de branches de la courbe initiale, ayant pour origine un point de la conique de transformation et pour tangente une droite non tangente à cette conique, correspond, dans la transformée, un système circulaire, de même origine, de même tangente, et dont les nombres caractéristiques sont les mêmes.*

Corollaire. — *Il en sera de même pour toutes les transformées successives obtenues avec la même conique.*

Deuxième cas : $2C = a''z^2 + 2b''xy$.

Supposant η donné par la formule (19), on trouve

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left[\left(\frac{p}{2}\,\mathrm{A}\right)\frac{p-q}{q},\ \left(\frac{p+\mathrm{R}_1}{q}\,\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \left(\frac{p+\mathrm{R}_s}{q}\,\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{b''}{a''}\left[\left(\frac{p+q}{q}\,\mathrm{A}\right)\frac{p}{q},\ \left(\frac{p+q+\mathrm{R}_1}{q}\,\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \left(\frac{p+q+\mathrm{R}_s}{q}\,\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),$$

d'où l'on déduit, conformément à la formule (17) du n° **2** (§ I)

$$(21) \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \left[\frac{p}{p-q},\ \frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

On voit que l'origine du système circulaire (S') est le point $z = 0$, $y = 0$, lequel est sur C, et que sa tangente est la droite $z = 0$, polaire de l'origine du système circulaire primitif. Donc, sur les transformées qui suivent, les systèmes circulaires correspondants obéissent à la loi indiquée au théorème IV.

Il est utile de remarquer que ce deuxième cas rentre dans le précédent. La construction de la transformée S' est, en effet, symétrique par rapport à la courbe S et à sa polaire réciproque Σ relativement à C. Or à un système circulaire de S, placé dans le deuxième cas, correspond sur Σ un système circulaire, placé dans le premier cas. Donc, d'après le théorème IV, le système circulaire correspondant, sur S', a l'origine, la tangente et les nombres caractéristiques de celui de Σ.

Ayant fait ici la recherche directe des nombres caractéristiques de (S'), je puis en conclure que ces nombres, donnés par (21), sont ceux qui conviennent au système circulaire (Σ), ainsi qu'on peut s'en assurer aussi par un calcul direct.

Troisième cas : $2C = ax^2 + 2byz$.

8. En partant toujours de la formule (19), on trouve

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha &= b\left[\left(\frac{p-2q}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p}{q}, \left(\frac{p-2q+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \left(\frac{p-2q+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\\
\gamma &= a\xi + b\left[\left(\frac{p}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p-q}{q}, \left(\frac{p+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \left(\frac{p+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\\
\beta &= -b\xi^{\frac{p}{q}}\left[\left(\frac{p}{q}\mathrm{A}^2\right)\frac{p-q}{q}, \left(\frac{2p+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \left(\frac{2p+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi)\\
&\quad - a\left[\left(\frac{p-q}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p+q}{q}, \left(\frac{p-q+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \left(\frac{p-q+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi).
\end{aligned}\right.$$

Il suffit de jeter un coup d'œil sur ces formules pour apercevoir la nécessité de distinguer plusieurs cas. En effet, l'expression de β se compose de la somme de deux séries, et les termes caractéristiques de cette somme sont ceux de la première ou de la seconde de ces séries, suivant que p est inférieur ou supérieur à $2q$. J'ai donc à distinguer les cas suivants :

$$\frac{p}{q} < 2, \quad \frac{p}{q} > 2, \quad \frac{p}{q} = 2.$$

Soit d'abord $\frac{p}{q} < 2$; on trouve sans peine

$$\frac{\beta}{\gamma} = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Cette formule contient le théorème suivant :

Théorème V. — *A un système circulaire de la courbe initiale, ayant pour origine et pour tangente un point et une tangente de la conique de transformation, et composé de branches ayant avec la tangente des contacts d'ordre inférieur à l'unité, correspond, dans la transformée, un système circulaire de même origine, de même tangente, et dont les nombres caractéristiques sont les mêmes.*

En second lieu, soit $\frac{p}{q} > 2$. Ce cas peut être immédiatement ramené au précédent. En effet, la polaire réciproque de S a pour système circulaire correspondant à (S) un système (Σ), dont l'origine et la tangente sont les mêmes que pour (S) et dont le tableau des nombres caractéristiques est

$$\frac{p}{p-q}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Comme $\dfrac{p}{p-q}$ est inférieur à 2, on en conclura, d'après le théorème, que ce tableau est aussi celui des nombres caractéristiques de (S'). C'est aussi ce que l'on trouvera aisément par un calcul direct.

En troisième lieu, j'ai à considérer le cas où l'on a $p=2$, $q=1$. Ici se présentent les circonstances suivantes, dans les formules (22) :

Le premier terme de l'expression de α disparaît : la série qui figure au second membre de l'expression de γ commence par un terme du premier degré, qui vient se réunir au terme $a\xi$; enfin les deux séries dont la somme compose β ont les mêmes nombres caractéristiques ; par suite, dans la somme, des termes caractéristiques peuvent se détruire. Pour ces raisons, on ne peut, dans le cas actuel, obtenir des conclusions complètes aussi aisément que dans les autres cas. Il me suffira, pour mon objet, de trouver le premier terme caractéristique du système circulaire (S^1).

Le premier terme de η (19) est $A\xi^2$; son second terme caractéristique est $A_1\xi^{2+\frac{p_1}{q_1}}$. Je supposerai, pour faire encore usage des formules (22), que ce soit, non plus le second terme caractéristique, mais le second terme absolu du développement de η. D'après cette convention, q_1 peut être égal à l'unité. Le premier terme de α est alors

$$\alpha = R_1 A_1 \xi^{2+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots.$$

Ceux de β et γ sont respectivement

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \beta &= -A(2Ab+a)\xi^3 - A_1[(4+R_1)Ab+(1+R_1)a]\xi^{1+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots, \\ \gamma &= (2Ab+a)\xi + (2+R_1)A_1\xi^{1+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

A cause de ces dernières relations, on aperçoit que les résultats sont différents suivant que l'on a

$$2Ab + a \gtrless 0, \tag{24}$$

ou que cette quantité est nulle. Il est aisé de voir que le sens de cette condition est le suivant : si l'inégalité (24) a lieu, c'est que chaque branche du système circulaire (S) a, avec C, un contact du premier ordre. Dans le cas opposé, l'ordre du contact s'élève.

Je suppose d'abord que l'inégalité (24) ait lieu. Alors le développement de $\frac{\alpha}{\gamma}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{\beta}{\gamma}$ commence par un terme de degré $\frac{p_1+q_1}{2q_1}$. Par suite, en premier lieu, si p_1 est égal ou supérieur à q_1, l'origine de (S') est le point $y=0$, $x=0$, mais la tangente diffère de $y=0$. Donc les transformées suivantes, en ce qui concerne les systèmes circulaires correspondants, sont régies par le théorème IV.

En second lieu, si p_1 est inférieur à q_1, l'origine et la tangente de (S') sont les mêmes que pour (S); mais le premier nombre caractéristique $\frac{2q_1}{p_1+q_1}$ est inférieur à 2. Donc les systèmes circulaires correspondants, dans les transformées suivantes, sont régis par le théorème V.

Soit maintenant le cas où l'inégalité (24) n'a pas lieu, c'est-à-dire supposons

$$2Ab + a = 0. \tag{25}$$

Les premiers termes de β et γ sont alors, en vertu de (23) et de (25),

$$\beta = A_1 A b (R_1 - 2)\xi^{3-\frac{p_1}{q_1}} + \ldots,$$
$$\gamma = A_1 (R_1 + 2)\xi^{1+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots.$$

Il faut observer que R_1 n'est autre chose que $\frac{p_1}{q_1}$, c'est-à-dire un nombre positif. Le premier terme de β peut ainsi être nul, mais non celui de γ. Je suppose d'abord $R_1 \lesseqgtr 2$. On a alors, pour le premier terme du développement de $\frac{\beta}{\gamma}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{\alpha}{\gamma}$

$$\frac{\beta}{\gamma} = -A\frac{R_1^2-4}{R_1^2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \ldots$$

Ainsi, pour (S'), l'origine et la tangente restent les mêmes que pour (S), et de plus on se trouve dans le cas où le premier nombre caractéristique est égal à 2. Soit maintenant

$$A' = \frac{A(R_1^2 - 4)}{R_1^4},$$

on a, en vertu de (25),

$$2A'b + a = -\frac{8Ab}{R_1^2}.$$

Cette quantité n'est donc pas nulle. Donc (S') se trouve dans le cas où l'inégalité (24) a lieu, et l'on peut par là connaître la loi des transformées suivantes.

Je suppose enfin $R_1 = 2$. Alors $\frac{\beta}{\gamma}$, développé suivant les puissances croissantes de $\frac{\alpha}{\gamma}$, commence par un terme de degré supérieur à 2; par conséquent, (S') se trouve dans le cas où le premier nombre caractéristique est supérieur à 2.

Tous les résultats précédents, relatifs à un système circulaire de branches tangentes à la conique de transformation, peuvent se résumer comme il suit :

Théorème VI. — *A un système circulaire tangent à la conique de transformation correspond, dans la suite des transformées successives, construites au moyen de la même conique, une suite de systèmes circulaires ayant tous même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques; et cela à partir de la courbe initiale elle-même, de la première ou de la seconde transformée, suivant que l'ordre de contact des branches du système initial avec la conique est inférieur, égal ou supérieur à l'unité.*

Dans cette suite de systèmes circulaires, l'origine commune est sur la conique, et, suivant le cas, la tangente commune est aussi tangente à la conique, ou ne l'est pas. Si elle lui est tangente, le premier nombre caractéristique commun est inférieur à 2.

9. Je vais maintenant, de l'ensemble des résultats précédents, tirer

des conséquences, en envisageant d'abord les transformées que l'on obtient par l'emploi d'une seule conique.

D'après les numéros 5 et 6, un système circulaire (S) donne lieu à une branche simple, dans la transformée dont le rang est donné par le théorème I, à moins que, dans une des précédentes, le système circulaire correspondant n'ait pour tangente une tangente de la conique de transformation. Si ce cas se produit, le système circulaire suivant a son origine sur cette conique (n° 7), et il en est de même de tous ceux qui lui correspondent sur toutes les transformées suivantes (théorème IV). Rapprochant ce résultat des théorèmes III, IV et VI, j'en conclus :

Théorème VII. — *A partir d'un certain rang, les transformées successives d'une courbe algébrique quelconque, obtenues au moyen d'une seule conique, ne contiennent aucune branche superlinéaire dont l'origine ne soit sur la conique de transformation.*

D'après le numéro 7, si une courbe S ne rencontre la conique C qu'en des points simples, sans avoir avec C aucun contact ; si, de plus, toutes les tangentes communes à S et à C sont des tangentes simples de S, toutes les branches de S^1 dont l'origine est sur C sont des branches simples. Il est aisé, d'après cette observation, de tirer la conclusion suivante :

Théorème VIII. — *Étant donnée une courbe* S, *il est toujours possible de choisir une conique de transformation, de telle sorte que la transformée de* S, *obtenue à un rang donné par l'emploi continu de cette conique, ne contienne aucune branche superlinéaire, sous la condition que le rang donné soit supérieur à une limite déterminée qui dépend de* S.

Remarque. — *Cette limite n'est autre chose que le plus grand des nombres que l'on obtient en appliquant le théorème I à toutes les branches superlinéaires de* S.

J'envisage, en second lieu, les transformées que l'on obtient au moyen de diverses coniques. Si l'on a soin de prendre ces coniques de telle manière que chacune d'elles ne rencontre la courbe à transformer qu'en des points simples, sans la toucher, et que les tangentes communes soient des tangentes simples de cette courbe, on a, *sous cette réserve,* la proposition suivante :

Théorème IX. — *A partir d'un certain rang, toutes les transformées successives d'une courbe algébrique quelconque, obtenues avec diverses coniques, ne contiennent aucune branche superlinéaire. Ce rang se détermine conformément à la remarque ci-dessus.*

§ III.

10. Je m'occupe maintenant de déterminer le degré et la classe de la transformée S' d'une courbe S. A cet effet, je vais établir quelques formules, qui feront l'objet de ce numéro et du suivant. La construction de la transformée, telle qu'elle est indiquée au nº 4 (§ II), est susceptible d'être généralisée, par la substitution d'une courbe quelconque à la conique C. Je ferai, pour les calculs actuels, cette généralisation, qui n'y apporte, pour ainsi dire, aucun changement; mais je n'appliquerai ensuite ces calculs qu'au cas simple considéré précédemment.

Soient $S = 0$, $C = 0$ les équations de deux courbes, de degrés m, n, la seconde étant la courbe de transformation. Soit (x, y, z) un point de S; on prend la droite polaire de ce point relativement à C; l'intersection de cette droite et de la tangente à S, en (x, y, z), engendre la transformée S'.

Les deux droites ont pour équations

$$XC_1 + YC_2 + ZC_3 = 0,$$
$$XS_1 + YS_2 + ZS_3 = 0.$$

Pour que le point (X, Y, Z) où elles se rencontrent soit sur une droite D

$$D = MX + NY + PZ = 0,$$

on a la condition

$$(1) \qquad A = \begin{vmatrix} M & N & P \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les intersections de la courbe A et de S sont les points de cette dernière auxquels correspondent des points de la transformée situés sur la droite D. Le nombre de ces intersections donnera ainsi le degré de cette transformée, et fera l'objet d'une étude ultérieure. J'aurai aussi recours à une autre forme de A, que j'obtiens comme il suit. J'ai identiquement

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} A = \begin{vmatrix} D & dD \\ nC & dC \end{vmatrix} S_2,$$

en posant

$$D = Mx + Ny + Pz,$$
$$dD = M\,dx + N\,dy + P\,dz.$$

De la relation (2) je conclus

$$A = S_2 \frac{nC\,dD - D\,dC}{z^2 d\left(\frac{x}{z}\right)}$$

ou, en posant $\frac{x}{z} = \xi$, et $C^{\frac{1}{n}} = U$,

$$(3)\qquad A = \frac{nC^{\frac{n+1}{n}} S_2}{z^2} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{D}{U}\right).$$

Dans cette dernière formule, il faut entendre que la dérivée qui figure au second nombre n'est pas une dérivée partielle. Au contraire, $\frac{D}{U}$ étant une fonction homogène et de degré zéro des variables x, y, z est simplement une fonction de deux variables ξ et $\eta = \frac{y}{z}$. Ces deux variables sont liées par l'équation $S = 0$. En prenant la dérivée indiquée dans l'équation (3), il faut considérer η comme fonction de ξ.

L'équation (1) est susceptible d'une interprétation géométrique simple. Je considère la courbe K

$$(4)\qquad K = D^n - \lambda C = 0,$$

λ étant une constante, déterminée de manière que l'équation (4) soit vérifiée par les coordonnées du point (x, y, z) de S, c'est-à-dire que la courbe K passe en ce point, lequel est d'ailleurs censé vérifier l'équation (1). Mais, d'après l'équation (3), l'équation (1) peut s'écrire $d\left(\frac{D}{U}\right) = 0$; ce que l'on transforme aisément en $dK = 0$. Donc la courbe K est tangente à S. Ainsi :

Soit D *une droite passant à l'intersection* m_1 *d'une tangente à une courbe* S *et de la droite polaire du point de contact* m, *relativement à une courbe* C, *de degré* n : *les courbes* K *qui ont avec* C *des contacts d'ordre* $n-1$ *aux* n *points d'intersection de* D *et de* C, *et qui passent au point* m, *y sont tangentes à* S.

L'équation $d\left(\frac{D}{U}\right) = 0$ exprimant que D contient un point m_1 de la transformée, on exprimera que D est tangente à cette transformée en m_1, en joignant l'équation $d^2\left(\frac{D}{U}\right) = 0$. Cette dernière équation étant supposée satisfaite, on en déduira $d^2K = 0$. Donc :

Celle des courbes K *de l'énoncé précédent que l'on obtient en prenant, pour la droite* D, *la tangente au lieu du point* m_1, *a avec* S *un contact du second ordre.*

Je n'indique cette propriété qu'en passant; on pourra reconnaître que c'est une extension d'une propriété connue du cercle osculateur.

11. Les calculs du numéro précédent sont relatifs à la détermination du degré de la transformée S^1 d'une courbe S. Ceux qui suivent ont trait à la détermination de la classe de cette transformée. La question est d'obtenir l'équation de la tangente à cette transformée sous une forme appropriée au problème dont il s'agit.

Comme on vient de le voir, les équations qui expriment que la droite D est une tangente de la transformée sont les suivantes :

$$d\left(\frac{D}{U}\right) = 0, \quad d^2\left(\frac{D}{U}\right) = 0.$$

On déduit aisément de là, pour l'équation d'une tangente, la forme suivante, où les majuscules désignent les coordonnées courantes :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z & 0 \\ x & y & z & U \\ dx & dy & dz & dU \\ d^2x & d^2y & d^2z & d^2U \end{vmatrix} = 0.$$

Les différentielles sont prises le long de la courbe S. On fera disparaître ces différentielles par des transformations dont je me contente de donner ici le résultat. Je pose

$$V = C_{11}(S_{23}^2 - S_{22}S_{33}) + \ldots + 2C_{12}(S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}) + \ldots,$$
$$W = C_1^2\,(S_{23}^2 - S_{22}S_{33}) + \ldots + 2C_1C_2(S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}) + \ldots.$$

Dans ces expressions, les termes non écrits, et suppléés par des points, sont ceux que l'on déduit des termes écrits par la permutation des indices. Soit, en outre

$$H = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}.$$

L'équation (5) se met sous la forme

$$(6)\qquad G = [nCV - (n-1)W]\sum S_1X + nCH\sum C_1X = 0.$$

Cette dernière équation, si l'on y considère X, Y, Z comme données, et x, y, z comme des coordonnées courantes, est celle d'une courbe G, dont les intersections avec S sont les points tels que les tangentes à la transformée S', aux points correspondants, passent par le point X, Y, Z.

Je ferai, en outre, usage d'une autre forme de la même équation. Je pose

$$x = z\xi, \quad y = z\eta, \quad U = zu.$$

Comme U est une fonction homogène et du premier degré de x, y, z, la fonction u ne dépend que de ξ et de η. Je désigne les dérivées, prises par rapport à ξ le long de la courbe S, par des accents. En partant de l'équation (6), on parvient aisément à la mettre sous la nouvelle forme

$$(7)\qquad E = \eta''(Zu + Xu' - Z\xi u') + u''(Y - X\eta' + Z\xi\eta' - Z\eta) = 0.$$

Cette nouvelle forme est d'ailleurs reliée à (6) par la relation

$$(8)\qquad G = \frac{(m-1)^2}{n^2 z^3} C^{\frac{2n-1}{2n}} S_2^3 E.$$

Telles sont les formules dont je ferai usage.

12. Avant d'appliquer les formules ci-dessus, il convient de rappeler quelques propositions de la théorie des points singuliers. Voici la première :

Étant données deux courbes, le nombre de leurs intersections qui sont confondues en un point est égal au produit des ordres de multiplicité de ce point sur chacune des deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches de l'une des courbes avec les branches de l'autre, en ce même point.

Étant donnés une courbe et un système circulaire ayant son origine en un point de cette courbe, j'appelle, par définition, *nombre des intersections de la courbe et du système circulaire* le produit des ordres de multiplicité du système circulaire et du point considéré sur la courbe, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches du système circulaire avec les branches de la courbe. Grâce à cette définition, la proposition précédente s'énonce ainsi :

Théorème X. — *Étant données deux courbes, le nombre de leurs intersections qui sont confondues en un point est égal à la somme des nombres des intersections de l'une des courbes avec les systèmes circulaires de l'autre, qui ont leurs origines en ce point.*

La proposition suivante donne le moyen de calculer directement le nombre des intersections d'une courbe et d'un système circulaire.

Théorème XI. — *Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe sous forme entière. Supposez que x et y soient les coordonnées d'un point* *d'un système circulaire, et à distance infiniment petite du premier ordre de l'origine de ce système. L'ordre de l'infiniment petit $f(x, y)$, multiplié par l'ordre de multiplicité du système circulaire, est égal au nombre des intersections de la courbe et de ce système circulaire.*

Il est clair que cette proposition n'est pas troublée par l'emploi de coordonnées homogènes. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de déterminer le nombre des intersections d'une courbe $f(x, y, z) = 0$, passant au point $x = 0$, $y = 0$, avec un système circulaire dont l'origine soit en ce point.

Je désigne, comme précédemment, par ξ et η le rapport $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$. Le système circulaire est défini par le développement d'une de ces variables, soit η, suivant les puissances ascendantes et fractionnaires de l'autre, ξ. Si la tangente de ce système circulaire n'est pas la droite $x = 0$, on aura un point à distance infiniment petite du premier ordre de l'origine, et appartenant au système circulaire, en donnant à ξ une valeur infiniment petite du premier ordre, et à η une des valeurs correspondantes. Soit m le degré de $f(x, y, z)$. On a

$$f(x, y, z) = z^m f(\xi, \eta, 1).$$

Par suite, pour le point considéré, comme z a une valeur finie, l'ordre de l'infiniment petit $f(x, y, z)$ est le même que celui de $f(\xi, \eta, 1)$. Soit ω l'ordre de cette quantité, et μ l'ordre de multiplicité du système circulaire. D'après le théorème XI, le produit $\mu\omega$ est le nombre des intersections de la courbe et du système circulaire.

Si la tangente du système circulaire est $x = 0$, on peut intervertir, dans le calcul que je viens d'indiquer, le rôle des variables ξ, η. On peut aussi s'en dispenser, par une très-petite modification du résultat, sur laquelle je n'insiste pas, n'en devant pas faire usage ici.

15. Il me reste à expliquer maintenant, en peu de mots, l'usage que l'on peut faire de ces résultats dans un grand nombre de questions, et, en particulier, dans la question qui fait l'objet de ce Mémoire.

Étant donnée une courbe $S = 0$, je suppose que l'on cherche le nombre de ses points satisfaisant à une condition donnée. J'admets que cette condition puisse être exprimée par une équation entière $f(x, y, z) = 0$. Les points cherchés sont alors les intersections des courbes S et f. Le produit des degrés de ces courbes est donc le nombre cherché; mais ce n'est là le plus souvent qu'une limite supérieure, et, pour obtenir le nombre précis, il faut tenir compte des solutions étrangères ou multiples. C'est alors qu'on est conduit à examiner l'ordre de multiplicité de chaque solution. A cet effet, on fait usage des théorèmes X et XI, en considérant successivement chaque système circulaire de la courbe S, à l'origine duquel passe la courbe f. On est donc conduit ainsi à calculer des nombres ω, comme je l'ai expliqué à la fin du numéro précédent.

Si $f(x, y, z)$ est un covariant, circonstance qui se présente chaque fois que la condition donnée est indépendante du triangle de référence, on pourra supposer, sans modifier $f(x, y, z)$, que l'origine et la tangente du système circulaire que l'on considère soient le point $x = 0$, $y = 0$ et la droite $y = 0$. Cette supposition facilite souvent le calcul. En voici un exemple simple, et dont le résultat sera utile pour la suite.

Soit à trouver la classe d'une courbe $S = 0$, c'est-à-dire le nombre des tangentes qu'on peut lui mener d'un point arbitraire X, Y, Z. L'équation de condition est

$$f(x, y, z) = XS_1 + YS_2 + ZS_3 = 0.$$

Soit m le degré de S; celui de f est $m - 1$. La limite supérieure de la classe est donc $m(m - 1)$. Les solutions étrangères sont fournies par les points dont les coordonnées annulent à la fois les dérivées partielles de S, c'est-à-dire par les points multiples. Il s'agit de trouver l'ordre de multiplicité d'une telle solution. Comme $f(x, y, z)$ est un covariant, je puis faire la supposition ci-dessus, pour calculer le nombre des intersections de f avec un système circulaire de la courbe S. Des relations

$$\frac{S_1}{y\,dz - z\,dy} = \frac{S_2}{z\,dx - x\,dz} = \frac{S_3}{x\,dy - y\,dx}$$

je tire, en posant

$$\frac{x}{z} = \xi, \quad \frac{y}{z} = \eta,$$

prenant ξ pour variable indépendante et dénotant les dérivées par des accents,

$$(9)\qquad \begin{cases} S_1 = -S_2\eta', \\ S_3 = S_2\xi^2\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)'. \end{cases}$$

D'après la supposition que l'origine et la tangente du système circulaire sont le point $x=0$, $y=0$, et la droite $y=0$, je dois supposer ξ infiniment petit du premier ordre, et alors η est infiniment petit d'ordre supérieur. Les équations (9) prouvent alors que S_1 et S_3 sont infiniment plus petits que S_2. L'ordre de l'infiniment petit $f(x, y, z)$ est donc le même que celui de l'infiniment petit S_2. Ainsi :

Théorème XII. — *Soit* O *un point multiple d'une courbe algébrique* $S=0$, *comprenant en* O *plusieurs systèmes circulaires de branches. Considérez l'un de ces systèmes, placez le sommet* $x=0$, $y=0$ *du triangle de référence en* O, *et faites coïncider la droite* $y=0$ *avec la tangente de ce système circulaire. Soit* ω *l'ordre de la quantité infiniment petite* S_2 *quand on met, pour les coordonnées, celles d'un point du système circulaire considéré, à distance infiniment petite du premier ordre de* O. *Soit, en outre,* μ *l'ordre de multiplicité de ce système circulaire. Répétez la même opération pour chacun des systèmes circulaires de la courbe* S, *ayant leur origine en* O. *La somme des nombres analogues à* $\mu\omega$ *est l'abaissement que le point singulier* O *produit dans la classe de la courbe* S.

Par suite, si Λ est la somme des nombres ainsi calculés pour tous les points multiples de S, la classe c est

$$(10)\qquad c = m(m-1) - \Lambda.$$

14. J'applique actuellement les principes précédents à la détermination du degré de la transformée S' d'une courbe S. L'équation de condition est (n° **10**)

$$\Delta = \begin{vmatrix} M & N & P \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0.$$

A cause de la simplicité du résultat, je fais encore ce calcul pour le cas général où C est une courbe de degré n.

Le degré de S étant m, celui de A est $(m+n-2)$. Le degré de S' a donc pour limite supérieure $m(m+n-2)$. J'étudie maintenant l'ordre de multiplicité de chaque solution.

Comme A est un covariant, je puis faire la supposition indiquée plus haut (n° **13**). Alors, comme on vient de le voir, S_1 et S_3 sont infiniment plus petits que S_2; donc, si C_1 et C_3 ne sont pas infiniment petits tous deux, A est un infiniment petit du même ordre que S_2. Il n'en est plus de même si C_1 et C_3 sont infiniment petits tous deux. Pour ce dernier cas, employons la seconde forme de A [n° **10**, formule (3)]

$$A = \frac{nC^{\frac{n+1}{n}}}{z^2} S_2 \left(\frac{D}{C^{\frac{1}{n}}}\right)'. \tag{11}$$

A cause de

$$nC = C_1 x + C_2 y + C_3 z = z(C_1 \xi + C_2 \eta + C_3),$$

on voit que, si C_3 est infiniment petit, il en est de même de C. Comme C est entier et que η est infiniment petit par rapport à ξ, supposé du premier ordre, C est au moins du premier ordre. Soit i cet ordre égal ou supérieur à l'unité. Il résulte de l'équation (11) que l'ordre de A surpasse celui de S_2 précisément de $(i-1)$. Ainsi, pour $i=1$, le résultat est le même que précédemment. Le résultat diffère dans le cas opposé. Le cas où $i=1$ est celui où, au point considéré, passe une seule branche de la courbe C, ayant une tangente différente de $y=0$. Alors C_3 est nul, mais C_1 ne l'est pas, pour $x=0$, $y=0$. On voit donc que ce cas rentre dans le précédent. Si, au contraire, i est supérieur à l'unité, c'est que la courbe C se compose, en ce point, de plusieurs branches ou est tangente à $y=0$; ces deux circonstances peuvent d'ailleurs se réunir. Soit r la multiplicité du système circulaire considéré sur S, ri est (théorème XI) le nombre des intersections de C et de ce système circulaire. Soit enfin R la multiplicité totale du point $x=0$, $y=0$ sur S, et I le nombre total des intersections de C et de S, réunies en ce point. L'abaissement que ce point produit dans le degré de S' surpasse l'abaissement qu'il produit dans la classe de $(I-R)$ (théorème XII).

Soit maintenant A l'abaissement total produit dans la classe de S par tous ses points multiples, le degré de S' est

$$(12) \qquad m_1 = m(m+n-2) - A - \sum(I - R).$$

Soit maintenant c la classe de S; on déduit de (12), en vertu de (10):

$$(13) \qquad m_1 = (n-1)m + c - \sum(I - R).$$

On peut encore mettre cette relation sous la forme

$$(14) \qquad m_1 = c - m + \sum R,$$

car $\sum I = nm$.

La forme (14) du résultat donne lieu à cet énoncé remarquable en ce sens que le degré de la courbe de transformation n'y apparaît pas explicitement.

Théorème XIII. — *Le degré de la transformée d'une courbe* S, *obtenue au moyen d'une courbe quelconque, est égal à la classe de* S, *diminuée de son degré, et augmentée de la somme des ordres de multiplicité, sur la courbe* S, *des points où cette courbe rencontre la courbe de transformation.*

Il ne faut pas perdre de vue que cet énoncé s'applique, quelle que soit la nature des points d'intersection des deux courbes, sur la courbe de transformation. Quant à la forme (13) du même résultat, on peut remarquer que $\Sigma(I - R)$ est la somme des ordres des contacts des diverses branches des deux courbes S et C; on a, par suite, le théorème suivant, que je borne au cas où C est une conique ($n = 2$).

Théorème XIV. — *Le degré de la transformée d'une courbe* S, *obtenue au moyen d'une conique, est égal à la somme du degré et de la classe de* S, *diminuée de la somme totale des ordres des contacts de cette courbe et de la conique.*

On a déjà fait la remarque que la transformée de S, au moyen d'une conique, est la même que la transformée, au moyen de la même conique, de la courbe Σ, polaire réciproque de S par rapport à cette conique. Comme le degré et la classe de S sont la classe et le degré de Σ, il en résulte que les sommes totales des ordres des contacts des courbes S et Σ avec la conique doivent être les mêmes. C'est, en effet, un cas particulier de cette proposition, que j'ai donnée dans mon *Mémoire sur les points singuliers*.

La somme des ordres des contacts des branches de deux courbes en un point est égale à la même somme, relativement à deux courbes corrélatives des premières, aux points correspondants.

15. Je m'occupe maintenant de la détermination de la classe de la courbe transformée S'. Je me borne ici au cas où $n = 2$, c'est-à-dire où la courbe de transformation est une conique. L'équation de condition est l'équation (6) du n° **11**, $G = 0$. Pour $n = 2$, le degré de G est $3(m-1)$, en sorte que la limite supérieure de la classe de S' est $3m(m-1)$. J'étudie maintenant l'ordre de multiplicité de chaque solution. Comme G est un covariant, je puis encore faire la supposition indiquée plus haut. Je ferai usage de la formule (8) du n° **11**, qui, pour $n = 2$, devient

$$G = \frac{(m-1)^2}{4z^3} C^{\frac{3}{2}} S_2^3 E, \tag{15}$$

E étant toujours [n° **11**, formule (7)]

$$E = \eta''(Zu + Xu' - Z\xi u') + u''(Y - X\eta' + Z\xi\eta' - Z\eta).$$

Pour cette étude, comme pour celle qui a fait l'objet du § II, je distinguerai quatre cas, répondant à quatre formes de l'équation de la conique de transformation.

Premier cas : $2C = ax^2 + a'y^2 + a''z^2$.

Je forme u et les premiers termes de son développement suivant les puissances ascendantes de ξ :

$$u = \frac{1}{z} C^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a\xi^2 + a'\eta^2 + a'')^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{a}{a''}\xi^2 + \ldots\right).$$

J'en déduis, pour $\xi = 0$,

$$u = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u' = 0, \quad u'' = \frac{a}{\sqrt{2a''}}.$$

Il résulte de là que, pour ξ infiniment petit, la partie principale de E est celle de l'un ou l'autre des deux termes $Zu\eta''$ ou Yu'', dont le second est fini.

Soit r l'ordre de multiplicité du système circulaire considéré, et $\frac{\rho}{r}$ l'ordre du contact de la tangente $y = 0$ avec chaque branche de ce système. On voit aisément que η'' est d'ordre $\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)$. Par suite, si $\frac{\rho}{r} \geqslant 1$, E est fini; si $\frac{\rho}{r} < 1$, E est infini et d'ordre $\frac{\rho}{r} - 1$.

Par suite, l'ordre de G est le triple de celui de S_2 si $\frac{\rho}{r} \geqslant 1$, ou lui est inférieur de $\left(\frac{r-\rho}{r}\right)$ si $\rho < r$.

D'une manière générale, soit λ le produit, par la multiplicité r, de l'ordre infinitésimal de S_2 pour un système circulaire de la courbe S. Nous avons, pour l'abaissement produit, dans la classe de S', par un système circulaire, le plus petit des deux nombres

$$3\lambda \quad \text{ou} \quad 3\lambda + \rho - r,$$

dans le cas considéré.

Deuxième cas : $2C = a'y^2 + 2b'zx$.

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(2b'\xi + a'\eta^2)^{\frac{1}{2}} = b'^{\frac{1}{2}}\xi^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$u' = \tfrac{1}{2} b'^{\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$u'' = -\tfrac{1}{4} b'^{\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{3}{2}} + \ldots.$$

La partie principale de E est celle de u''. Donc E est d'ordre $-\frac{3}{2}$.

Mais $C^{\frac{3}{2}}$ est de l'ordre $\frac{3}{2}$. Donc C est de l'ordre de $S_{\frac{3}{2}}$. Donc, dans le deuxième cas, l'abaissement de la classe de S^1 est 3λ.

TROISIÈME CAS : $2C = a''z^2 + 2b''xy$.

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(a'' + 2b''\xi\eta)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{b''}{a''}\xi\eta + \ldots\right),$$

$$u' = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\xi\eta)' + \ldots,$$

$$u'' = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\xi\eta)'' + \ldots.$$

La partie principale de E est celle de $Zu\eta''$, d'ordre $\frac{\rho}{r} - 1$; par suite, l'abaissement est, dans ce cas, $3\lambda + \rho - r$.

QUATRIÈME CAS : $2C = ax^2 + 2byz$.

Ce cas est celui du contact de C et du système circulaire considéré. Soit h l'ordre du contact de C avec chaque branche. L'ordre de u est $\frac{1+h}{2}$, celui de u' est $\frac{h-1}{2}$.

Si $h \gtrless 1$, l'ordre de u'' est alors $\frac{h-3}{2}$. D'autre part, l'ordre de $Xu'\eta'$ est $\frac{\rho}{r} - 1 + \frac{h-1}{2}$, nombre supérieur au précédent. Donc l'ordre de E est $\frac{h-3}{2}$. Si l'on ajoute l'ordre $\frac{3}{2}(1+h)$ de $C^{\frac{3}{2}}$, on a, pour l'ordre de G, le triple de celui de S_2, augmenté de $2h$.

L'abaissement est donc $3\lambda + 2rh$.

Si $h = 1$, ce raisonnement ne s'applique pas. Ce cas peut se présenter de deux manières : 1° si $\frac{\rho}{r} > 1$; 2° si $\frac{\rho}{r} = 1$.

1° $\frac{\rho}{r} > 1$. Comme $\frac{\eta}{\xi^2}$ commence par un terme de degré positif en ξ, on peut écrire

$$u = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \xi \left(1 + \frac{2b}{a}\frac{\eta}{\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi + \frac{b}{a}\frac{\eta}{\xi} + \ldots\right),$$

$$u' = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)' + \ldots,\right]$$

$$u'' = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{b}{a}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)'' + \ldots.$$

On voit aisément, d'après ces résultats, que la partie principale de E est celle de u'', d'ordre $\frac{\rho}{r} - 2$. D'ailleurs l'ordre de $C^{\frac{3}{2}}$ est 3; donc on a pour résultat

$$3\lambda + \rho + r.$$

2° $\frac{\rho}{r} = 1$. Ici $\frac{\eta}{\xi^2}$ se réduit à une constante pour $\xi = 0$; mais, l'ordre du contact de la conique avec la branche, dont les coordonnées sont η et ξ, étant par hypothèse égal à l'unité, il en résulte aisément que $a + 2b\frac{\eta}{\xi^2}$ ne s'évanouit pas pour $\xi = 0$. Soit $\frac{s}{r}$ le degré du second terme du développement de $\frac{\eta}{\xi^2}$ suivant les puissances croissantes de ξ, on a, pour u, un développement tel que

$$u = A\xi + B\xi^{1+\frac{s}{r}} + \ldots;$$

d'où

$$u' = A + \left(1 + \frac{s}{r}\right)\xi^{\frac{s}{r}} + \ldots,$$

$$u'' = \frac{s}{r}\left(1 + \frac{s}{r}\right)\xi^{\frac{s}{r}-1} + \ldots.$$

Il en résulte que $\eta'' u'$ est d'ordre zéro, tandis que u'' est d'ordre $\left(\frac{s}{r} - 1\right)$. D'ailleurs, l'ordre de $C^{\frac{3}{2}}$ est égal à 3; donc l'abaissement est ici le plus petit des deux nombres $3\lambda + 3r$ ou $3\lambda + 2r + s$. Je dirai que cet abaissement est $3\lambda + 2r + \sigma$, σ étant le plus petit des deux nombres r ou s.

16. Je résume maintenant les résultats du numéro précédent comme il suit :

Théorème XV. — *Sur la courbe initiale, distinguez cinq catégories de systèmes circulaires, savoir :*

1° *Ceux dont ni l'origine ni la tangente n'appartiennent à la conique de transformation, et qui, en outre, sont composés de branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre inférieur à l'unité;*

2° *Ceux dont les tangentes touchent la conique, et dont les origines ne sont pas sur cette conique;*

3° *Ceux qui touchent la conique et qui sont, en outre, composés de branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre supérieur à l'unité;*

4° *Ceux qui touchent la conique et qui sont, en outre, composés de branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre inférieur à l'unité;*

5° *Ceux qui touchent la conique et qui sont composés de branches ayant avec leur tangente et avec la conique des contacts d'ordre égal à l'unité.*

Soient maintenant R *la somme des ordres de multiplicité des systèmes circulaires d'une même catégorie, et* $\mathfrak{R}$ *la somme des ordres des contacts des branches de ces systèmes avec leurs tangentes* (ces lettres étant affectées d'indices correspondant à chaque catégorie); Σ *la somme des nombres analogues à* σ (n° **15**, 4^e cas) *pour la cinquième catégorie; et enfin, pour les branches de la courbe initiale qui ont avec la conique des contacts d'ordre supérieur à l'unité,* J *la somme des ordres de ces contacts.*

On a, en désignant par c la classe de la courbe initiale, et par c_1 *celle de la transformée,*

$$(16)\quad c_1 = 3c + R_1 + R_2 - R_3 - 2R_5 - \Sigma - 2J - (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + 2\mathfrak{R}_4).$$

Ce résultat se simplifie beaucoup dans le cas particulier où la conique de transformation ne rencontre la courbe qu'en des points simples, sans avoir avec elle aucun contact, et n'a en commun avec la même courbe que des tangentes simples de cette dernière. Il n'y a plus alors à distinguer que la première catégorie de systèmes circulaires de l'énoncé précédent, et la formule (16) se réduit à

$$(17) \qquad c_1 = 3c + R_1 - \mathfrak{R}_1.$$

Soit r la multiplicité d'un des systèmes circulaires de la première catégorie, et $\frac{\rho}{r}$ l'ordre des contacts de ses branches avec la tangente; on a

$$\rho < r, \quad R_1 = \Sigma r, \quad \mathfrak{R}_1 = \Sigma \rho.$$

Soient maintenant r' et ρ' les nombres analogues pour un autre système circulaire, mais dans lequel on a $\rho' > r'$, et posons

$$R'_1 = \Sigma r', \quad \mathfrak{R}'_1 = \Sigma \rho'.$$

On sait que, si l'on passe d'une courbe à une corrélative, les nombres r et ρ s'échangent entre eux. Donc, pour une courbe corrélative de S, les nombres analogues à R_1 et $\mathfrak{R}_1$ sont $\mathfrak{R}'_1$ et R'_1. D'ailleurs, comme on l'a déjà observé, la transformée S' est la même, si on la construit au moyen de la courbe Σ, polaire réciproque de S, relativement à la conique de transformation. On a donc aussi

$$(18) \qquad c_1 = 3m + \mathfrak{R}'_1 - R'_1.$$

De (17) et (18) on conclut

$$(19) \qquad 3(c - m) = \mathfrak{R} - R,$$

les lettres R et $\mathfrak{R}$ s'appliquant maintenant à tous les systèmes circulaires. La relation (19), que l'on rencontre ici d'une manière incidente, a été démontrée directement, de deux manières différentes, dans mon *Mémoire sur les points singuliers*. Elle donne notamment le nombre des points d'inflexion d'une courbe dont on connaît les singularités, le degré et la classe. En effet, dans le second membre, chacun des points d'inflexion figure pour une unité. Si donc on les met à part, on trouve pour leur nombre N

$$N = 3(c - m) + R - \mathfrak{R},$$

le nombre R et $\mathfrak{R}$ ne s'appliquant plus qu'aux points multiples.

Pour faire cette dernière vérification, j'ai supposé le cas simple où la formule (16) se réduit à (17). Il n'y aurait point de difficulté à la répéter pour le cas général, mais je crois inutile de le faire.

Je vais encore tirer de la formule (17) une autre conséquence, relative au *genre*. Eu égard à la supposition faite pour cette formule, on a, pour le degré de la transformée S^1 (théorème XIV),

$$m_1 = m + c.$$

De cette dernière formule et de (17) je conclus

$$c_1 - 2m_1 = c - 2m + R_1 - \mathcal{R}_1. \tag{20}$$

Je conserve à R'_1 le même sens que précédemment, et je désigne, en outre, par R'' la somme des ordres de multiplicité des systèmes circulaires de S, dont les branches ont avec leurs tangentes des contacts du premier ordre, et j'écris, au lieu de (20),

$$c_1 - 2m_1 + \mathcal{R}_1 + R'_1 + R'' = c - 2m + R_1 + R'_1 + R''. \tag{21}$$

Dans le second membre, la somme des trois derniers termes désigne la somme des multiplicités de tous les systèmes circulaires de la courbe S. Soit M cette somme. Dans le premier membre, la somme des trois derniers termes désigne la somme des multiplicités des systèmes circulaires correspondants sur S^1 (n° 5, § II). Or S^1 ne possède, en dehors de ces derniers, aucun système circulaire propre (de multiplicité supérieure à l'unité); mais, parmi ces derniers, il peut s'en trouver dont la multiplicité soit l'unité. Pour les faire disparaître, retranchons dans les deux membres le nombre T de tous les systèmes circulaires considérés sur S. Alors, si M_1 est la somme de tous les systèmes circulaires propres sur S^1, et T_1 leur nombre, on a

$$\mathcal{R}_1 + R'_1 + R'' - T = M_1 - T_1;$$

donc, de (21), je déduis

$$c_1 - 2m_1 + M_1 - T_1 = c - 2m + M - T,$$

c'est-à-dire que l'expression qui figure au second membre de cette dernière formule se conserve dans la transformation considérée.

D'après le théorème IX, en répétant la même transformation un nombre fini de fois, on parvient à une courbe n'ayant aucun système circulaire propre. Soient γ et μ la classe et le degré de cette courbe. On aura

$$c - 2m + \mathrm{M} - \mathrm{T} = \gamma - 2\mu.$$

Mais, pour une pareille courbe, ne contenant aucune branche superlinéaire, on sait que $(\gamma - 2\mu)$ est égal à $2(p-1)$, p étant le *genre* de cette courbe. D'ailleurs cette courbe et la courbe initiale se correspondent *point par point;* donc leur genre est le même; donc p est le genre de la courbe initiale, et l'on obtient la formule

$$c - 2m + \mathrm{M} - \mathrm{T} = 2(p-1),$$

qui donne explicitement le genre d'une courbe quelconque, et que j'ai déjà démontrée de deux manières différentes en d'autres occasions.

17. Si l'on considère la suite des transformées $\mathrm{S}^1, \mathrm{S}^2, \ldots$ d'une courbe quelconque S, obtenues au moyen de coniques choisies chaque fois de manière à se trouver dans le cas simple considéré déjà, on parvient toujours, d'après le théorème IX, à une transformée de rang fini k, telle que cette courbe et toutes les suivantes ne possèdent plus aucun système circulaire propre. Soient c_k et m_k la classe et le degré de cette courbe S^k. On aura, pour les suivantes,

$$\begin{array}{ll} m_{k+1} = m_k + c_k, & c_{k+1} = 3c_k, \\ m_{k+2} = m_{k+1} + c_{k+1}, & c_{k+2} = 3c_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

d'où

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{k+i} = 3^i c_k, \\ m_{k+i} = m_k + c_k(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{i-1}) = m_k + \dfrac{3^i - 1}{2} c_k. \end{array} \right.$$

Théorème XVI. — *Quelle que soit la courbe initiale, les degrés et* *les classes des transformées successives suivent, à partir d'un certain rang, la loi marquée par les équations* (22).

Il n'en est pas de même si l'on conserve toujours la même conique de transformation. A partir d'un certain rang, les catégories 1°, 3°, 5° de l'énoncé XV disparaissent, il est vrai, et les formules se réduisent à

$$m_1 = m + c - \mathfrak{R}_4,$$
$$c_1 = 3c + \mathrm{R}_2 - \mathfrak{R}_2 - 2\mathfrak{R}_4;$$

et, si l'on observe que l'on a

$$\mathfrak{R}_2 + 2\mathfrak{R}_4 = 2c,$$

on peut réduire ces formules à

$$m_1 = m + \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}_2,$$
$$c_1 = c + \mathrm{R}_2.$$

D'ailleurs, à partir du rang considéré, les courbes n'ont aucun système circulaire propre dont l'origine ne soit sur la conique de transformation (théorème VII, § II). Par suite, R_2 marque simplement le nombre des points en lesquels la tangente de la courbe est aussi tangente à la conique, tandis que $\mathfrak{R}_2$ marque le nombre des tangentes communes pour lesquelles ces tangentes doivent être comptées. Par conséquent, si une de ces tangentes est, pour la courbe, une tangente d'inflexion, elle figure pour deux unités dans $\mathfrak{R}_2$ et pour une seule dans R_2. Pour cette raison, il ne paraît pas possible de trouver, dans le cas actuel, une proposition analogue au théorème XVI.

§ IV.

18. J'ai, dans ce qui précède, étudié les courbes que l'on obtient en transformant une courbe au moyen d'une conique. Si cette conique dégénère en deux droites, les résultats subissent d'assez notables modifications. C'est ce cas particulier qui va faire l'objet de la dernière partie de ce travail.

Aux transformées particulières que l'on obtient ainsi je donne le nom d'*adjointes*. Voici donc la construction de l'adjointe d'une courbe S. On donne deux droites P, Q, dans le plan de S. Soient m un point de S et T la tangente en ce point. L'intersection de T et de la polaire de m, relativement aux droites P, Q, engendre l'*adjointe* de S. Soit S^1 cette adjointe. Si l'on répète la même construction en conservant les mêmes droites P, Q, et substituant à S l'adjointe S^1, on engendre l'adjointe S^2 de S^1, ou *deuxième adjointe* de S, et ainsi de suite. Ce qui donne un intérêt particulier à la considération de ces courbes, c'est que, si l'on prend, d'une manière convenable, une figure corrélative, l'ensemble de S et de ses adjointes successives se change en l'ensemble d'une courbe Σ et de ses développées successives. Pour cette raison, les résultats que l'on obtiendra ici fourniront des démonstrations nouvelles des propriétés des développées successives, que j'ai déjà données dans mon *Mémoire sur les points singuliers*.

Pour l'objet actuel, on n'a pas à faire de nouveaux calculs, mais seulement à reprendre ceux qui précèdent, en examinant les modifications qu'ils subissent. J'examine d'abord les calculs du § II : leur objet était l'étude du système circulaire qui, sur une transformée, correspond à un système circulaire donné de la courbe initiale.

Le côté $y=0$ et le sommet $y=0$, $x=0$ du triangle de référence sont toujours la tangente et l'origine du système circulaire initial considéré. Cette condition remplie, on a considéré, pour le cas d'une conique de transformation, quatre formes distinctes de l'équation $C=0$ de cette conique, savoir :

$$\begin{aligned} 2C &= ax^2 + a'y^2 + a''z^2, \\ 2C &= a'y^2 + 2b'zx, \\ 2C &= a''z^2 + 2b''xy, \\ 2C &= ax^2 + 2byz. \end{aligned}$$

La première de ces formes, dans le cas où C se réduit à deux droites, P, Q, donne lieu à trois formes distinctes

$$2C = ax^2 + a''z^2, \quad 2C = a'y^2 + a''z^2, \quad 2C = ax^2 + a'y^2 ;$$

les trois autres donnent lieu à

$$2C = 2b'zx, \quad 2C = 2b''xy, \quad 2C = 2byz.$$

J'ai donc en tout six formes distinctes. Elles répondent à six cas distincts, savoir :

Pour la première forme, l'origine et la tangente du système circulaire sont placées d'une manière entièrement quelconque par rapport aux droites P, Q.

Pour les deux suivantes, il existe une particularité relativement à l'intersection Ω des droites P, Q : dans l'une, Ω est sur le droit $y = 0$; dans l'autre, Ω est au point $y = 0$, $x = 0$.

Pour les trois dernières, il existe une particularité relativement à une des droites P, Q, par exemple P. Dans l'une, P passe au point $y = 0$, $x = 0$; dans l'autre, P est la droite $y = 0$ elle-même, et, en outre, le point Ω coïncide avec $y = 0$, $x = 0$; dans le dernier enfin, P est la droite $y = 0$, sans que Ω coïncide avec l'origine du système circulaire.

On voit que toutes les positions particulières sont comprises dans ces six cas.

Première forme : $2C = ax^2 + a''z^2$.

19. Le calcul du n° 5 (§ II) devient ici plus simple; mais le résultat est le même. Soit donné le système circulaire

$$(1) \qquad \eta = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right](\xi), \; \frac{p}{q} > 1,$$

on trouve

$$(2) \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \left[\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

C'est l'équation (11) du n° 5; mais, dans le cas actuel, les conséquences à tirer de (2) diffèrent de celles que l'on a obtenues au n° 5. En effet, si p est inférieur à $2q$, la tangente du système circulaire (2) est la droite $z = 0$; elle passe donc en Ω. Donc la première adjointe n'est pas, comme la courbe initiale, dans le cas auquel se rapporte la première forme, mais dans celui qui correspond à la seconde forme de C. En nous occupant de cette seconde forme, nous verrons tout à l'heure que, dans le cas correspondant, les adjointes successives obéissent à une loi simple. Ce que je vais prouver actuellement, c'est que, si p n'est pas inférieur à $2q$, la même circonstance se présente non plus pour la première adjointe, mais pour une autre des suivantes.

Je suppose d'abord q différent de l'unité, et p supérieur à $2q$; car, p étant premier à q ne peut être égal à $2q$. La tangente de (2) est alors $y=0$. On peut appliquer à l'adjointe S' le même calcul; par suite, si t est l'entier contenu dans $\frac{p}{q}$, on pourra poursuivre ainsi jusqu'à l'adjointe de rang $(t-1)$, pour laquelle le tableau des nombres caractéristiques ne différera de (1) que par le premier de ces nombres. Ce premier nombre sera manifestement $\frac{p-(t-1)q}{q}$. Ce nombre étant inférieur à 2, on voit que, pour l'adjointe de rang t, la tangente est la droite $z=0$, ce qui est conforme à la proposition annoncée.

Je suppose, en second lieu, $q=1$ et $p \geqq 2$. Il est clair qu'en appliquant successivement la formule (2), on trouvera, pour l'adjointe de rang $(p-2)$, le tableau suivant des nombres caractéristiques :

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \dots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

En répétant ensuite un raisonnement du n° 5, et désignant par t_1 l'entier contenu dans $\frac{p_1}{q_1}$, on trouvera pour l'adjointe de rang $(p+t_1-1)$, le tableau

$$\frac{p_1-(t_1-1)q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \dots, \quad \frac{p_s}{q_s},$$

où la première fraction est inférieure à 2. Donc, pour l'adjointe suivante, la tangente passe au point Ω.

Dans le cas actuel $(q=1)$, le premier exposant fractionnaire du développement (1) est $p+\frac{p_1}{q_1}$, et le rang de l'adjointe considérée est $(p+t_1)$. Dans les cas précédents $(q>1)$, le premier exposant fractionnaire était $\frac{p}{q}$, et le rang de l'adjointe, dont la tangente passe en Ω, était le nombre t. D'après cette remarque, on peut réunir les résultats précédents dans l'énoncé suivant :

Théorème XVII. — *A un système circulaire de la courbe initiale* S, *n'ayant pas pour origine un point des droites* P, Q, *et n'ayant* *pas pour tangente une droite passant à l'intersection* Ω *de* P *et* Q, *correspond, sur une des adjointes successives, un système circulaire dont la tangente passe en* Ω. *Le rang de la première adjointe qui jouisse de cette propriété est égal à l'entier contenu dans le premier exposant fractionnaire du développement relatif au système circulaire considéré sur* S.

Comme on le voit, cette proposition ne s'applique qu'à un système circulaire propre, c'est-à-dire tel que, dans le développement qui lui est relatif, il y ait effectivement des exposants fractionnaires.

Deuxième forme : $2C = a'y^2 + a''z^2$.

20. Le calcul n'offrant aucune particularité, je me borne à en écrire le résultat. De

$$(3)\qquad \eta = \left[\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\quad \frac{p}{q} > 1,$$

on déduit

$$(4)\qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \left[\frac{2q-p}{p-q},\ \frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

La tangente de (4) étant $z = 0$, on a la proposition suivante :

Théorème XVIII. — *Si un système circulaire de la courbe initiale* S *a pour tangente une droite passant en* Ω, *le système circulaire correspondant sur l'adjointe a pour origine* Ω, *et pour tangente la conjuguée harmonique de celle de* S, *relativement aux droites* P, Q.

Quant au tableau des nombres caractéristiques, pour S^1, il est donné par (4).

Le théorème XVIII montre que, si la courbe initiale est dans le cas auquel est appropriée la deuxième forme, l'adjointe est dans le cas correspondant à la troisième forme.

Troisième forme : $2C = ax^2 + a'y^2$.

En supposant toujours l'équation (3) pour le système circulaire considéré, je trouve

$$(5)\qquad \frac{\alpha}{\gamma} = \left[\frac{2p-q}{p},\ \frac{p_1}{q_1},\ldots\ \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\beta}{\gamma}\right).$$

La tangente de (5) est la droite $x = 0$, conjuguée harmonique de $y = 0$ relativement aux droites P, Q. Par suite, l'adjointe S^1 est dans le même cas que la courbe initiale S. En appliquant successivement ce résultat, on voit que la droite $x = 0$ est la tangente de toutes les adjointes de rang impair, et $y = 0$ la tangente de toutes les adjointes de rang pair. En outre, le tableau des nombres caractéristiques reste constamment le même, sauf en ce qui concerne le premier de ces nombres. Ce dernier est successivement, pour la courbe initiale et les adjointes de rang $1, 2, \ldots, i, \ldots$,

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{2p-q}{p}, \quad \frac{3p-2q}{2p-q}, \ldots, \quad \frac{p+i(p-q)}{q+i(p-q)}.$$

Ainsi :

Théorème XIX. — *Si un système circulaire de la courbe initiale* S *a pour origine le point* Ω *et une tangente différente de* P *et* Q, *il en est de même des systèmes circulaires correspondants, sur toutes les adjointes successives. Pour ces systèmes, les deux termes de la première fraction caractéristique croissent en progression arithmétique de même raison ; les autres fractions caractéristiques restent toujours les mêmes.*

Sous une autre forme, on peut dire que *les ordres de multiplicité de ces systèmes circulaires forment une progression arithmétique, et que la somme des ordres des contacts de leurs branches avec leurs tangentes reste constante.*

En effet, la somme des ordres de ces contacts est toujours

$$(p-q)q_1q_2\cdots q_s,$$

et l'ordre de multiplicité du système circulaire de l'adjointe de rang i est

$$qq_1q_2\cdots q_s + i(p-q)q_1q_2\cdots q_s.$$

Les théorèmes XVII, XVIII et XIX font connaître, pour une adjointe de rang quelconque, le système circulaire qui correspond à un système circulaire de la courbe initiale, s'il est dans un des cas qui correspondent aux formes 1, 2, 3. En effet, le théorème XIX fournit la solution de cette question pour le cas de la troisième forme; et les théorèmes XVII et XVIII prouvent que, si, pour le système circulaire initial, on se trouve placé dans le cas de la première ou de la deuxième forme, on est ramené au cas de la troisième forme pour le système circulaire correspondant sur une des adjointes suivantes.

Quatrième et cinquième forme.

21. On trouve aisément les résultats compris dans les théorèmes ci-après :

Théorème XX. — *Si la courbe initiale comprend un système circulaire dont l'origine soit sur une des droites* P, Q, *le système circulaire correspondant sur l'adjointe a même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques.*

Théorème XXI. — *Si la courbe initiale comprend un système circulaire dont l'origine soit le point* Ω *et la tangente une des droites* P, Q, *le système circulaire correspondant sur l'adjointe a même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques.*

Sixième forme : $2C = 2byz$.

Ici, comme au n° **8** (§ II), on doit distinguer plusieurs cas, et l'on est conduit, en conservant les notations du n° **8**, aux résultats suivants :

1° Si $\frac{p}{q} \gtrless 2$, le système circulaire se reproduit tel quel dans l'adjointe.

2° Si $q = 1$, $p = 2$ et $p_1 \geqq q_1$, on a pour l'adjointe un système circulaire dont l'origine est la même et dont la tangente est différente. Ce système circulaire est donc dans le cas auquel est relative la quatrième forme.

3° Si $q = 1$, $p = 2$ et $p_1 < q_1$, on a pour l'adjointe un système circulaire, qui est dans le premier des cas relatif à la sixième forme.

On a donc l'énoncé suivant :

Théorème XXII. — *Si la courbe initiale comprend un système circulaire dont la tangente soit la droite* P *et dont l'origine ne soit pas en* Ω, *il y correspond, sur les adjointes successives, une suite de systèmes cir-*

culaires ayant même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques; et cela, à partir de la courbe initiale ou de la première adjointe, suivant que l'ordre des contacts des branches du système initial avec P *est différent de l'unité ou est égal à l'unité.*

22. Des divers théorèmes précédents résulte la conclusion suivante :

Théorème XXIII. — *A partir d'un certain rang, tout système circulaire propre d'une adjointe d'une courbe quelconque est dans un des cas suivants :*

1° *Son origine est en* Ω *et sa tangente différente de* P *et* Q.

2° *Son origine est sur une des droites* P, Q, *et sa tangente diffère de cette droite.*

3° *Son origine est en* Ω, *et sa tangente est une des droites* P, Q.

4° *Sa tangente est une des droites* P, Q, *sans que son origine soit en* Ω; *de plus, l'ordre du contact de chacune de ses branches avec la tangente est différent de l'unité.*

A partir du même rang, les systèmes circulaires correspondant à ceux qui sont dans un quelconque des trois derniers cas ont, sur toutes les adjointes suivantes, même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques.

Les systèmes circulaires correspondant à ceux qui sont dans le premier cas suivent la loi marquée par le théorème XIX.

Voici maintenant une remarque qu'il est essentiel de faire pour établir entre les transformées, obtenues au moyen d'une conique toujours la même, et les adjointes, une différence importante. Pour les transformées, il s'introduit, à chaque rang, de nouveaux points sur la conique de transformation. Pour les adjointes, au contraire, le fait analogue ne se produit pas. En effet, le résultat du n° **19** montre qu'une branche simple ne peut conduire, pour l'adjointe, à une branche dont la tangente passe en Ω. De la sorte, les systèmes circulaires des quatre catégories mentionnées au théorème XXIII, et qui existent dans l'adjointe à partir de laquelle s'applique ce théorème, sont, à partir de cette adjointe, en nombre définitif. Pour cette raison, les degrés et les classes des adjointes successives suivent toujours une loi uniforme, ainsi que je vais le prouver.

Pour y parvenir, on pourrait appliquer aux adjointes les calculs faits précédemment (§ III) pour les transformées, en y introduisant des modifications très-simples. Au lieu de suivre cette voie, je puis, grâce à la remarque précédente, obtenir très-aisément ce résultat comme il suit.

Je considère l'adjointe S à partir de laquelle s'applique le théorème. Soient m son degré, c sa classe. Le nombre total de ses intersections avec P et Q est égal à $2m$; le nombre total des tangentes qu'on peut lui mener de Ω est c. Je vais compter de même ces nombres pour la première adjointe S^1 de cette courbe, en les dénotant par $2m_1$ et c_1.

Considérons l'ensemble des systèmes circulaires de S, qui sont dans la première catégorie mentionnée au théorème XXIII. Soient R la somme de leurs ordres de multiplicité, et $\mathfrak{R}$ la somme des ordres des contacts de leurs branches avec leurs tangentes. D'après le théorème XIX, les nombres analogues, pour S^1, sont $R + \mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}$. Ces systèmes circulaires figurent, dans le nombre total des intersections de S, avec P et Q pour 2R unités. Leurs correspondants figurent pour $2(R + \mathfrak{R})$ unités dans le nombre total des intersections de S^1 avec P et Q. Quant aux systèmes circulaires de S, qui sont dans une des trois dernières catégories du théorème XXIII, ils figurent pour le même nombre d'unités dans les deux nombres ci-dessus. On a donc

$$2m_1 = 2m + 2\mathfrak{R}.$$

Dans le nombre total des tangentes menées de Ω à S, les systèmes circulaires $(R, \mathfrak{R})$ figurent pour $R + \mathfrak{R}$ unités. Leurs correspondants figurent, pour $R + 2\mathfrak{R}$ unités, dans le nombre des tangentes menées de Ω à S^1. Quant aux autres, ils figurent encore pour autant d'unités dans les deux nombres; donc

$$c_1 = c + \mathfrak{R}.$$

Et, puisque le nombre $\mathfrak{R}$ se conserve dans toutes les adjointes suivantes, on a, pour l'adjointe de rang i,

$$m_i = m + i\mathfrak{R}, \quad c_i = c + i\mathfrak{R}.$$

Ainsi :

Théorème XXIV. — *A partir d'un certain rang, les degrés et les classes des adjointes successives d'une courbe quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison.*

Voici une autre conséquence. Je me reporte à la formule qui donne le nombre des points d'inflexion d'une courbe (n° **16**, § III). Soit N le nombre des points d'inflexion de S, sauf ceux qui coïncident avec Ω, et soit N_i le nombre analogue pour S_i. Je trouve la relation

$$N_i = N + i\mathfrak{R}.$$

Théorème XXV. — *A partir du même rang, les nombres de points d'inflexion des adjointes successives, qui ne coïncident pas avec le point d'intersection des droites de transformation, forment une progression arithmétique de même raison que les degrés et les classes de ces courbes.*

Au moyen des résultats ci-dessus, on peut calculer aussi le nombre des points doubles ordinaires qui subsistent dans une adjointe quelconque. Pour y parvenir, il suffit de faire usage d'une formule contenue dans mon *Mémoire sur les points singuliers*, et qui fournit, en fonction des nombres caractéristiques, l'abaissement que les systèmes circulaires produisent dans la classe d'une courbe. Je ne reproduirai pas ici ce calcul, et je me contenterai d'énoncer le résultat :

Théorème XXVI. — *A partir du même rang, les nombres de points doubles des adjointes successives, non situés sur les droites de transformation, forment une progression arithmétique, dont la raison est différente de celle des précédentes.*

Il y a des cas où le nombre $\mathfrak{R}$, qui est la raison des précédentes progressions, est nul. Alors les degrés, les classes, les nombres de points d'inflexion sont constants. Dans ce cas aussi, comme on pouvait s'y attendre, la raison de la dernière progression est aussi nulle. Cette raison est, en effet, le produit de $\mathfrak{R}$ par un nombre positif, qui dépend de plusieurs éléments assez complexes.

J'ai fait remarquer précédemment que la figure formée par une courbe et ses adjointes successives est corrélative de la figure formée par une courbe et ses développées successives. Par suite, des théorèmes XXIV, XXV et XXVI, on peut conclure le suivant, dont une partie est contenue dans mon Mémoire déjà cité :

THÉORÈME XXVII. — *A partir d'un certain rang, les développées successives d'une courbe algébrique quelconque jouissent des propriétés suivantes :*

Leurs degrés, leurs classes, les nombres de leurs points de rebroussement non à l'infini et dont les tangentes ne sont pas isotropes, et les nombres de leurs sommets, forment quatre progressions arithmétiques de même raison.

Les nombres de leurs tangentes doubles et de leurs normales doubles, en des points non à l'infini et non isotropes, forment deux progressions arithmétiques, dont la raison commune est différente de celle des progressions précédentes.

Je vais compléter les théorèmes précédents en indiquant comment est déterminé le rang qui y figure. D'après les résultats ci-dessus, on le trouve facilement comme il suit, pour les adjointes :

THÉORÈME XXVIII. — *Le rang de la première adjointe à partir de laquelle s'appliquent les théorèmes XXIII, XXIV, XXV et XXVI se calcule de la manière suivante :*

1° *Si la courbe initiale comprend des branches superlinéaires dont les origines ne soient pas sur une des droites de transformation* P, Q, *et dont les tangentes ne passent pas au point* Ω *d'intersection de* P *et* Q, *considérez les développements relatifs à chacune de ces branches superlinéaires, et prenez, dans chacun d'eux, le premier exposant fractionnaire. Le rang cherché surpasse d'une unité l'entier contenu dans le plus grand de ces exposants.* (Ces développements doivent être faits suivant les puissances d'une des coordonnées, de telle sorte que le premier exposant ne soit pas inférieur à l'unité.)

2° *Si la courbe initiale ne comprend pas de telles branches, et qu'elle ait des tangentes passant en* Ω, *dont les points de contact ne soient pas* Ω, *et qui ne se confondent ni avec* P *ni avec* Q, *ou bien si ces tangentes se réduisent aux seules droites* P *et* Q, *mais qu'en même temps il y ait au moins une branche ayant, avec une de ces droites, un contact du premier ordre, ou un point qui ne soit pas* Ω, *le rang cherché est égal à l'unité.*

3° *Dans les autres cas, le rang cherché est zéro; les théorèmes considérés s'appliquent alors à partir de la courbe elle-même.*

Pour obtenir le rang à partir duquel s'applique le théorème XXVII, il suffit de faire usage du théorème XXVIII, en substituant à la courbe proposée une corrélative. On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème XXIX. — *Le rang à partir duquel s'applique le théorème XXVII peut se calculer ainsi : considérez les points de la courbe proposée, non à l'infini, où passent des branches dont les tangentes ne soient pas isotropes et satisfaisant, en outre, à l'une des deux conditions suivantes :*

1° *Soit* $\frac{p}{q}$ *le premier nombre caractéristique de l'une de ces branches* (elle peut être simple si $q = 1$); *le nombre* q *est différent de* $(p-1)$;

2° *Ou bien, si le premier nombre caractéristique est* $\frac{p'}{p'-1}$ (p' étant un entier), *la branche doit admettre au moins un second nombre caractéristique,* $\frac{p_1}{q_1}$.

Si la courbe contient de tels points, le rang cherché surpasse d'une unité le plus grand des entiers contenus dans les nombres tels que $\frac{p}{p-q}$ *et* $\left(p' + \frac{p_1}{q_1}\right)$.

Si la courbe ne contient pas de tels points et qu'elle ait des branches infinies, non paraboliques, et dont les asymptotes ne soient pas isotropes, ou bien si elle a des branches infinies dont les asymptotes soient isotropes et que ces branches aient avec ces asymptotes des contacts du premier ordre, le rang cherché est égal à l'unité.

Dans les autres cas, le rang cherché est nul. Le théorème XXVII s'applique alors à partir de la courbe proposée elle-même.

J'ajoute la remarque suivante. Si l'on considère une courbe dont les points s'associent deux à deux, de telle sorte que la normale en deux points associés soit la même, on ne doit pas appliquer à une telle courbe le théorème XXIX. L'application doit en être faite à la courbe, lieu des milieux des segments compris entre les points associés de la proposée.

Sur une surface de quatrième classe dont on peut déterminer les lignes de courbure;

PAR M. LAGUERRE.

1. Les propriétés générales des surfaces du quatrième ordre ayant une ligne double du second ordre et des surfaces de quatrième classe, corrélatives des précédentes, qui sont doublement inscrites dans un cône du second ordre, sont actuellement bien connues. L'étude des variétés de ces surfaces peut néanmoins offrir quelque intérêt à l'égard de leurs propriétés métriques; la surface qui fait l'objet de cette Note peut être considérée comme une des corrélatives de l'anallagmatique du quatrième ordre à centre ou comme une transformée homographique de la surface parallèle à l'ellipsoïde : on peut construire ses lignes de courbure, et sa définition géométrique très-simple la rattache étroitement aux surfaces du second ordre; on peut la définir ainsi qu'il suit :

2. Soient S et s deux surfaces homofocales du second ordre, et P un de leurs plans principaux communs; par une droite D prise arbitrairement dans le plan P, menons un plan touchant la surface S au point M, et un plan touchant la surface S au point m. D'après un théorème connu, dû à M. Chasles, la droite Mm est perpendiculaire à D : on peut donc par D mener un plan perpendiculaire à Mm; appelons μ le point d'intersection de ces deux plans.

Lorsque D se déplace dans le plan P, le point μ décrit une surface Σ, et c'est cette surface dont je veux étudier les propriétés; je dirai, pour simplifier le langage, qu'à la droite D du plan P correspondent respectivement les points M, m et μ des surfaces S, s et Σ; en sorte qu'à chaque droite du plan correspondent deux points sur chacune des surfaces du second ordre, et quatre points sur la surface Σ.

3. En premier lieu, j'établirai la proposition suivante :

En un point quelconque μ de la surface Σ, la normale à la surface est la droite $\mu m M$ qui joint les points correspondants sur les surfaces du second ordre homofocales.

A cet effet, considérons un point quelconque A situé sur la droite D, correspondant au point μ; le cône Θ, ayant pour sommet le point A et circonscrit à la surface Σ, touchera cette dernière au point μ, et, si l'on remarque que $M m \mu$ est dans l'espace perpendiculaire au plan μD, on pourra définir ainsi qu'il suit le cône Θ, ou plutôt la courbe sphérique Θ' suivant laquelle ce cône est coupé par une sphère Q ayant pour centre le point A.

D'après un théorème connu, les traces sur la sphère Q des cônes circonscrits à S et s, et ayant pour sommet le point A, sont deux coniques sphériques homofocales S' et s'; le plan principal P coupe cette sphère suivant un axe sphérique P' commun à S' et à s'. Par un point quelconque d' de P', menons un arc de grand cercle touchant S' en M', et un arc de grand cercle touchant S' en m'; puis, par d', menons un arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc de grand cercle qui joint M' et m'. En appelant μ' leur point d'intersection, on voit que, quand d' se déplacera sur P', μ' décrira la courbe de contour apparent Θ'.

Si la proposition que je veux démontrer est vraie, la tangente menée à Θ' au point μ' sera l'arc de grand cercle $\mu' d'$; et réciproquement cette proposition sera démontrée si la tangente sphérique au contour apparent est déterminée comme je viens de l'indiquer, quand l'œil est placé en un point quelconque de D, ou encore comme un plan est déterminé par deux des droites qu'il contient quand l'œil est placé en deux points distincts de D. Or, comme je vais le faire voir, cette construction de la tangente sphérique est facile à vérifier quand l'œil est placé en un des deux points où la droite D rencontre S.

4. Soit H un de ces deux points : la surface S est vue de ce point, suivant une ellipse sphérique S', et la surface s suivant les deux foyers f et φ de cette ellipse située sur l'arc de grand cercle perpendiculaire à P'.

Il s'agit donc de vérifier le théorème suivant :

Si d'un point d' de l'axe P' d'une ellipse sphérique S' on mène un arc de grand cercle touchant cette ellipse en M', et si par d' on mène un arc de grand cercle perpendiculaire à fM', f désignant l'un des deux foyers de f et φ de S' situés sur un arc de grand cercle perpendiculaire à P', leur point d'intersection μ décrit une courbe sphérique tangente à l'arc de grand cercle $\mu d'$; ou, en d'autres termes, le lieu du point μ est un cercle ayant pour centre le point f.

Ce théorème s'établit facilement dans le cas plus général où le point d', au lieu de décrire l'axe $f\varphi$, décrit un arc de grand cercle quelconque perpendiculaire à P'.

A cet effet, je ferai remarquer qu'il est évident lorsqu'on remplace l'ellipse sphérique par une ellipse plane et que le point M' se ment parallèlement à l'un des axes; cela résulte immédiatement de ce qu'une conique plane et un cercle ayant pour centre l'un de ses foyers sont deux courbes homologiques; si maintenant on projette cette conique et les axes sur une sphère ayant pour centre un point de la droite menée par le foyer, perpendiculairement au plan de la conique, on obtient le lemme sur lequel je viens de m'appuyer.

La construction de la normale à la surface Σ, que j'ai donnée ci-dessus, est donc entièrement démontrée.

5. Quelques remarques sur ce qui précède ne seront pas inutiles. En premier lieu, on voit que les courbes sphériques de contour apparent de la surface Σ, quand l'œil est placé en un point de P, sont susceptibles d'une définition entièrement analogue à celle de la surface Σ, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Étant données deux ellipses sphériques homoocales, si, par un point quelconque D, *on mène des arcs de grand cercle tangents aux deux ellipses, et si l'on projette orthogonalement le point* D *sur l'arc de grand cercle qui joint le point de contact des tangentes avec les ellipses, le pied* μ *de l'arc projetant décrit une courbe sphérique tangente à l'arc de grand cercle* μD.

Il est à peine utile d'indiquer qu'un théorème analogue a lieu pour les coniques homofocales planes.

6. Les surfaces S et s sont respectivement coupées par le plan P, suivant des ellipses E et e qui sont des coniques doubles de Σ.

Des résultats précédents (nº 4) il résulte immédiatement que :

Le cône circonscrit à la surface Σ *et ayant pour sommet un point* H *de la conique* E *se compose de deux cônes de révolution coupant le plan* P *suivant les tangentes que l'on peut mener du point* H *à la conique* e, *et ayant pour axes les génératrices de* S *qui se croisent au même point.*

Ces quatre cônes ont en commun quatre plans tangents; deux d'entre eux se coupent suivant la tangente menée au point H à la conique E : ce sont les plans tangents à la surface en ce point; les deux autres, qui sont doublement tangents à Σ, se coupent suivant une perpendiculaire au plan P.

Il est facile de déterminer le degré de leur enveloppe. La surface Σ est de quatrième classe; en effet, le plan P ne touche évidemment pas la surface et à une droite quelconque de ce plan correspondent quatre points de la surface, et par conséquent quatre plans tangents.

Par suite, le cylindre doublement circonscrit dont je viens de parler est du second ordre, et il est facile de voir que sa trace sur le plan P est une conique homofocale à E et e.

D'où cette proposition :

La surface corrélative de la surface Σ *est une surface du quatrième ordre ayant une conique double.*

De là se déduiraient facilement diverses conséquences relatives aux coniques doubles de Σ et aux cônes du second degré qui lui sont circonscrits, mais je crois inutile de m'étendre à ce sujet.

7. D'après ce qui précède, on voit que toutes les droites telles que Mm sont normales à une même surface. Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant, que j'ai donné, il y a déjà quelques années [*].

---

[*] *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* (*Bulletin de la Société philomathique*, 1868). — *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872).

Étant données deux surfaces du second degré homofocales, si, par une droite D *située dans un plan fixe* P, *on mène des plans qui touchent respectivement ces surfaces en* M *et en* m, *toutes les cordes telles que* Mm *sont normales à une série de surfaces.*

Dans le cas général, cette série de surfaces comprend une surface anallagmatique du quatrième ordre; mais, comme je l'ai fait remarquer dans un des Mémoires cités ci-dessus, lorsque le plan fixe P est un plan principal commun aux deux surfaces du second ordre, cette anallagmatique disparaît et est rejetée entièrement à l'infini.

Il importait, dans ce cas, de définir géométriquement et d'une façon simple une surface particulière coupant orthogonalement le système des rayons; d'après ce qui précède, on voit que la surface Σ précédemment définie donne la solution de la question. Cette surface se comporte relativement aux anallagmatiques du quatrième ordre comme l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement relativement au cercle. Dans le cas général, on sait, comme je l'ai montré, déterminer les groupes de rayons qui forment des surfaces développables; il en résulte que l'on saura déterminer les lignes de courbure de Σ; mais, bien que cette détermination soit comprise comme cas particulier dans les propositions que j'ai données antérieurement sur ce sujet, je crois cependant utile de la faire directement.

8. *Étant donnée une conique quelconque* K *passant par les points d'intersection des coniques* E *et* e, *si la droite* D *se déplace tangentiellement à* K, *le point* μ *correspondant décrit une ligne de courbure de* Σ.

Démonstration. — Soient D une tangente quelconque à K touchant cette courbe au point A; M, m et μ les points qui correspondent respectivement à D sur les surfaces S, s et Σ. Si la droite D, par un déplacement infiniment petit, tourne autour du point A, les points M, m et μ viennent respectivement en M′, m' et μ'. Les plans polaires de A relativement aux surfaces S et s étant perpendiculaires à P, on voit que les droites MM′ et mm' se projettent sur ce plan suivant les polaires de A relativement aux coniques E et e; d'où il suit, puisque les coniques E, e et K ont quatre points communs, que ces projections se coupent sur la tangente en A à la conique K; en d'autres termes, les droites

MM' et mm' se coupent dans l'espace, les normales en μ et μ' sont donc dans un même plan et $\mu\mu'$ est tangente à une des lignes de courbure qui se croisent au point μ.

Corollaire. — Étant donné le plan tangent à la surface Σ au point μ, si l'on désigne par D la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan P et par A et B les points où la droite D touche les deux coniques du faisceau (E, e) qui lui sont tangentes, les droites μA et μB sont les directions des axes de l'indicatrice au point μ.

Connaissant, comme je l'ai montré plus haut, huit cônes de révolution circonscrits à la surface et la touchant au point μ, on pourrait construire sans peine les grandeurs de ces axes; mais les constructions que l'on déduit immédiatement de cette considération ne me paraissent pas assez simples pour être rapportées ici.

9. Examinons, dans quelques cas particuliers remarquables, ce que devient la surface Σ.

Si la surface s se réduit à la focale de S située dans le plan P, Σ se confond avec S, et l'on retrouverait ainsi, si on le voulait, les lignes de courbure de cette dernière surface.

Si s se réduit à une focale de S située dans un plan perpendiculaire à P, Σ est une *cyclide de Dupin*. Supposons enfin que les surfaces S et s se confondent; soient M un point quelconque de S et MQ la perpendiculaire abaissée de ce point sur P, il est facile de voir que la droite Mm est alors la symétrique de MQ relativement au plan tangent mené en M à la surface S; en d'autres termes, Mm provient de la réflexion du rayon MP sur cette surface, et l'on voit, conformément au théorème de Dupin, que tous les rayons réfléchis sont normaux à Σ. De la construction donnée par le point μ on déduit d'ailleurs que $M\mu = MP$; la surface Σ est donc, dans ce cas, une *anticaustique par réflexion de la surface du second ordre, les rayons incidents étant parallèles à l'un de ses axes*.

10. De la construction que j'ai donnée des lignes de courbure de Σ on déduit facilement que les développables, lieu des normales le long d'une de ces lignes de courbure, coupent les surfaces du second ordre S et s suivant un système de lignes conjuguées : je veux dire qu'en

chaque point de l'une de ces surfaces les tangentes aux courbes du système qui s'y croisent forment un système de droites conjuguées relativement à l'indicatrice en ce point.

De là diverses conséquences intéressantes découlant immédiatement de cette proposition due à M. Ribaucour : « Si les développables lieu des normales à une surface découpent un réseau conjugué sur une surface du second ordre S, elles y découpent un second réseau également conjugué ; elles tracent deux réseaux conjugués sur chacune des surfaces homofocales à S. Chacune des développables est elle-même circonscrite à une surface du second ordre homofocale à S [*]. »

11. Il est facile de démontrer que la surface Σ la plus générale est *une anticaustique par réfraction d'une surface du second ordre, les rayons incidents étant parallèles à l'un des axes de cette surface.*

A cet effet, par une droite D du plan P menons un plan touchant la surface S en M et les deux plans tangents à s ; en appelant m et m' les points de contact de ces derniers plans, si l'on mène par D des plans respectivement perpendiculaires à Mm et à Mm', ils couperont ces droites en deux points μ et μ' situés sur la surface Σ, et que je désignerai sous le nom de *points associés* de cette surface relativement à S. D'une proposition que j'ai donnée antérieurement [**] il résulte que les droites Mμ et Mμ' sont également inclinées sur le plan MD, et que, par suite, les longueurs Mμ et Mμ' sont égales.

Imaginons maintenant la sphère ayant pour centre le point M et pour rayon Mμ ; cette sphère, d'après les propositions précédentes, touche la surface Σ aux points μ et μ' ; les plans tangents menés à Σ en ces points se coupent d'ailleurs sur le plan P suivant la droite D qui est située dans le plan mené en M tangentiellement à S. On en

---

[*] *Notice sur les travaux mathématiques de M. Ribaucour*, 1873.

[**] *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* (*Bulletin de la Société philomathique*, 18 janvier 1868).

Étant données deux surfaces homofocales A *et* B *et une droite* D, *menons par cette droite les plans tangents aux deux surfaces, et soient b et b' les points de contact relatifs à la surface* B, *à l'un des points de contact relatifs à la surface* A ; *les droites ab, ab' sont dans un même plan avec la normale au point a et également inclinées sur cette normale.*

conclut immédiatement que le rayon de la sphère varie proportionnellement à la distance de son centre au plan P. La surface Σ, qui est l'enveloppe de cette sphère, est donc, pour un indice de réfraction convenablement déterminé, une anticaustique de S, les rayons incidents étant perpendiculaires au plan P.

12. Une partie des résultats précédents peut facilement être généralisée. En se reportant, en effet, à la proposition que j'ai rappelée ci-dessus (n° **7**), on voit que l'anallagmatique, trajectoire orthogonale du système de rayons qu'elle définit, est rejetée à l'infini, non-seulement quand le plan fixe P est un plan principal commun aux deux surfaces homofocales, mais encore dès qu'il passe par leur centre; les surfaces trajectoires de ces rayons doivent donc être considérées comme des surfaces parallèles à une anallagmatique rejetée à l'infini.

Pour étudier directement ces surfaces, considérons d'abord une anallagmatique Σ_0 déterminée par une surface du second ordre S et une sphère Θ d'un rayon donné arbitrairement; étant donné un point quelconque M sur la surface S, en désignant par D la distance de M à la sphère (distance comptée sur une tangente) et par δ la distance constante du centre de la sphère à un plan quelconque P passant par le centre de S, si l'on considère une sphère ayant pour centre le point M et pour rayon la longueur $(D - \delta)$, l'enveloppe de ces sphères est une surface parallèle à l'anallagmatique Σ_0.

Si maintenant on imagine que le centre de la sphère Θ s'éloigne indéfiniment suivant une direction perpendiculaire au plan P, son rayon conservant toujours du reste une valeur finie, l'anallagmatique Σ_0 est alors rejetée à l'infini : la longueur $(D - \delta)$ devient la distance du point M au plan P et la surface Σ parallèle à Σ_0 une anticaustique par réflexion de S, les rayons incidents étant perpendiculaires à P.

Pour déterminer les lignes de courbure de cette anticaustique, je rappellerai les propositions suivantes, que j'ai données dans ma Note *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* déjà citée.

Étant donnée une surface anallagmatique Σ_0 définie au moyen d'une surface de second ordre S *et d'une sphère directrice* Θ, *imaginons la surface développable qui leur est circonscrite : elle a pour lignes doubles quatre coniques planes;* H *désignant l'une quelconque de ces coniques* *et Q son plan, H est situé sur une surface du second ordre s homofocale à S. Si par une droite D, prise arbitrairement dans le plan Q, on mène un plan tangent à S et un plan tangent à s, la droite qui joint les points de contact est normale à Σ_0.*

Imaginons une quelconque des coniques passant par les quatre points communs au plan Q et aux surfaces S et s, lorsque la droite D roulera sur cette conique, les normales à Σ_0 correspondantes formeront une surface développable et traceront une ligne de courbure sur cette surface et sur toutes celles qui lui sont parallèles.

13. Appliquons cette proposition au cas où la sphère Θ s'éloigne à l'infini dans une direction Π perpendiculaire au plan P, son rayon demeurant fini. La surface développable circonscrite se réduit alors sensiblement à deux cylindres infiniment peu différents l'un de l'autre et dont les génératrices sont sensiblement parallèles à Π. Une seule de ses lignes doubles est à distance finie : c'est une conique différant infiniment peu de la section de la surface S par le plan conjugué à la direction Π; la surface homofocale qui la renferme diffère elle-même infiniment peu de S; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Considérons des rayons lumineux parallèles à une direction Π et venant se réfléchir sur une surface de second ordre S; soit Ω la courbe de contact de cette surface avec la développable [*] *isotrope qui lui est circonscrite. Le plan conjugué à la direction Π rencontre Ω en quatre points; considérons l'une quelconque des coniques qui passe par ces quatre points; sa polaire, relativement à S, est un cylindre du second ordre coupant S suivant une biquadratique. Les rayons réfléchis le long de cette biquadratique forment une surface développable, et par conséquent déterminent sur l'anticaustique une ligne de courbure.*

14. Les mêmes considérations s'appliquent au cas de la réfraction, en supposant que la sphère Θ, en s'éloignant à l'infini, demeure toujours inscrite dans un cône de révolution donné.

---

[*] J'appelle ainsi la développable dans laquelle sont inscrites toutes les surfaces homofocales à S.

On obtient ainsi le théorème suivant :

Étant données deux surfaces homofocales du second ordre S *et* s *et un plan fixe* P *passant par leur centre commun, si, par une droite* D *prise arbitrairement dans le plan* P, *on mène un plan tangent à* S *et un plan tangent à* s, *la droite qui joint les points de contact engendre, lorsque* D *se déplace, un système de rayons.*

Tous ces rayons peuvent être considérés comme provenant de rayons incidents parallèles et se réfractant sur S *avec un indice de réfraction convenablement choisi; ils peuvent être également considérés comme provenant des rayons incidents parallèles et se réfractant sur* s, *la direction de ces seconds rayons et leur indice de réfraction étant généralement différents de la première direction et du premier indice de réfraction.*

Ces rayons sont normaux à deux anticaustiques par réfraction, la première relative à la surface S *et la deuxième à la surface* s, *et l'on peut déterminer les lignes de courbure de ces anticaustiques.*

Je ne sais si l'on avait remarqué les rapports étroits qui relient entre elles la théorie des anticaustiques des surfaces du second ordre et la théorie des surfaces homofocales, non plus que la détermination simple qui en résulte de leurs lignes de courbure.

Lettre adressée à M. Resal;

Par M. HEINE.

Monsieur,

Je fais appel à votre bienveillante impartialité en vous demandant d'accueillir les observations suivantes au sujet du Mémoire *Sur les fonctions de Legendre,* publié par M. Laurent dans le Cahier du mois de novembre 1875 de votre *Journal de Mathématiques.*

Avant la publication de mon Traité *Sur les fonctions sphériques,* les recherches sur ces fonctions se réduisaient en général à établir et à démontrer, de la manière la plus directe et la plus rigoureuse, les découvertes profondes de Laplace. C'est en considérant, en même temps que la fonction P (de Laplace et de Legendre), une nouvelle fonction Q, de seconde espèce, que j'ai été conduit aux résultats obtenus dans mon Ouvrage. Or, en parlant de mon livre, M. Laurent se contente de dire : « M. Heine a publié en Allemagne un Traité complet des fonctions X_n et de leurs conjuguées; mais ce Traité pourrait être considérablement simplifié en faisant usage du calcul des résidus. » Après avoir, de cette manière, cité mon nom, M. Laurent donne dans la suite de son Mémoire presque exclusivement mes résultats, à l'exception toutefois de ceux qu'il emprunte, sans les nommer, à Ivory, à Jacobi, à Dirichlet et à Neumann.

La formule (10) de M. Laurent

$$\Xi = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(x + \cosh\varphi\sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}$$

a été trouvée par moi [p. 59, formule (19); p. 70, formule (21) de mon Traité].

L'article V de M. Laurent « sur un développement important » contient ma formule

$$\frac{1}{y-x} = \Sigma(2n+1)P^n(x)Q^n(y),$$

[formule (14) de mon Traité] avec cette seule différence que M. Laurent ne donne que plus tard, dans son article VII, à la fonction Q, la forme simple sous laquelle je l'ai présentée. C'est encore moi qui ai donné le théorème que le développement dont il s'agit est inadmissible, si la condition

$$\text{mod.}\,(x+\sqrt{x^2-1}) < \text{mod.}\,(y+\sqrt{y^2-1})$$

n'est pas remplie (§ 41 de mon Traité).

La fonction génératrice des quantités Q (Ξ de M. Laurent) a été également trouvée par moi [p. 57, formule (18) de mon Traité]. En voilà assez de mon droit; les lecteurs jugeront d'ailleurs s'ils trouvent, dans le Mémoire de M. Laurent, la rigueur des démonstrations, la filiation des idées et la généralité que j'ai obtenues dans mon livre.

Dans ses préliminaires (art. I), M. Laurent introduit les fonctions X_n par la formule de Lagrange, en se servant de la méthode de Jacobi [voir *Journal de Crelle,* vol. II, p. 223, ou le *Journal de M. Liouville,* vol. II, p. 105], et il parvient à la formule d'Ivory

$$X_n = \frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

qu'il attribue à Rodrigues. Dans quel recueil, dans quelle publication se trouvent les titres de Rodrigues à cette découverte?

La formule (16) de M. Laurent

$$\Xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{Z_n dz}{z-x}$$

a été obtenue par M. François Neumann père [formule (24) de mon Traité].

L'article VIII de M. Laurent se trouve dans une brochure de M. Charles Neumann fils, qui prend pour point de départ mon développement de $(y-x)^{-1}$.

M. Laurent attribue à Laplace la formule (qui n'est admissible que pour des valeurs de x, dont la partie réelle est positive)

$$(8) \qquad X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}},$$

mais sans donner le moyen de contrôler son assertion, en indiquant dans quel passage de ses Œuvres elle a été donnée. Cette assertion, en la supposant exacte, serait très-précieuse pour moi; car, malgré mes recherches, je n'ai pu trouver la formule (8) que dans le Mémoire de Jacobi (*Journal de Crelle*, vol. XXVI, p. 82, 85], et je serais heureux de pouvoir rectifier cette erreur (si c'en est une) dans la seconde édition de mon Traité, qui va paraître bientôt.

L'équation (6) de M. Laurent est l'expression connue de X_n, trouvée par Dirichlet (*voir* mon Traité, § 10) et simplifiée par M. Mehler (*Annales de Clebsch*, t. V, p. 141); mais la démonstration que M. Laurent en donne manque de rigueur.

Après avoir eu aussi longtemps le devoir de critiquer M. Laurent, je ne terminerai pas sans lui avoir fait mon compliment sur sa formule

$$\Sigma(2n+1)X_nZ_n = \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n),$$

de laquelle on peut réellement se servir d'une manière utile pour la démonstration de mon développement de $(y-x)^{-1}$.

Veuillez agréer, etc.

Heine.

Halle-sur-Saale, 6 janvier 1876.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite;

Par M. L. FUCHS.

Mon Mémoire traite des équations différentielles linéaires du second ordre qui possèdent des intégrales algébriques, et d'une application nouvelle de la théorie des invariants.

Chaque intégrale de l'équation différentielle est une fonction linéaire et homogène de deux solutions fondamentales y_1, y_2 de cette équation, avec des coefficients constants. Une intégrale quelconque, algébrique, étant η toute fonction symétrique des diverses valeurs qu'admet η est une forme binaire des deux quantités y_1 et y_2, qui est elle-même une fonction rationnelle de la variable indépendante z. Mais, comme elle peut être un produit de puissances entières d'autres formes binaires, il est nécessaire de considérer ces formes binaires composées des quantités y_1, y_2, qui représentent des racines de fonctions rationnelles. Désignons leur complexe par Φ.

Si l'on peut satisfaire à l'équation différentielle par la racine d'une fonction rationnelle, les formes linéaires seront du plus petit degré possible, parmi celles du complexe Φ; en général, nous allons chercher le degré minimum N qui puisse être attribué à une forme de ce complexe.

Comme y_1 et y_2 se changent, par les divers chemins qu'on peut faire suivre à la variable z, en des fonctions linéaires et homogènes de ces mêmes quantités, avec des coefficients constants, les diverses valeurs qui en résultent, pour une forme composée de y_1 et y_2, s'obtiennent au moyen de substitutions linéaires effectuées sur y_1 et y_2. En m'appuyant sur cette remarque, je démontre que les covariants d'une forme du complexe Φ représentent aussi des racines de fonctions rationnelles. De là résulte que les covariants de la forme du degré minimum N, dont les degrés sont inférieurs à N, doivent tous s'évanouir identiquement. On pourrait, par suite, obtenir facilement le nombre N, si l'on possédait la solution du problème suivant : *Trouver l'expression algébrique des formes binaires de degré m, dont tous les covariants de degré moindre que m disparaissent identiquement.* Mais ce problème n'étant pas encore résolu, voici la marche que j'ai suivie pour déterminer N.

Parmi les racines d'une équation algébrique irréductible qui satisfont à l'équation différentielle, je distingue celles dont les quotients ne sont pas constants, en désignant leur ensemble par le nom de *système réduit des racines.* Chaque forme du complexe Φ, composée des termes d'un système réduit comme facteur, étant aussi appelée *forme primaire,* je trouve que la forme de degré minimum N représente, aussi bien que son covariant hessien, une forme primaire. Je conclus ensuite, de l'expression même du covariant du hessien, que N ne peut être supérieur à 12; puis, au moyen d'une réduction ultérieure, que N n'a qu'une des valeurs 2, 4, 6, 8, 10, 12.

Donc, pour que l'équation différentielle possède des intégrales algébriques, il faut qu'une forme dont le degré est l'un de ces nombres soit une racine d'une fonction rationnelle de la variable indépendante; et le théorème réciproque a lieu, en exceptant le cas de $N = 2$.

Pour reconnaître s'il y a des formes qui représentent des racines de fonctions rationnelles, j'ai employé deux méthodes : l'une ramène à la question de satisfaire à une équation différentielle linéaire, par la racine d'une fonction rationnelle. En effet, toute forme en y_1, y_2, et du degré m, satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $m+1$; donc généralement, pour que l'équation différentielle donnée possède des intégrales algébriques, il faut et il suffit qu'une équation différentielle linéaire déterminée, et dont l'ordre ne surpasse point le nombre 12, puisse être satisfaite par la racine d'une fonction rationnelle. Mais la question de satisfaire à une équation différentielle par la racine d'une fonction rationnelle se réduit à la question élémentaire de reconnaître si un système d'équations linéaires admet des solutions finies. Ensuite je montre comment on peut parvenir à ce système d'équations linéaires, sans former effectivement l'équation différentielle d'ordre $N + 1$, mentionnée plus haut.

La seconde des deux méthodes dont j'ai parlé s'appuie sur une recherche directe des changements qu'éprouvent les formes composées de y_1 et y_2, par les chemins divers de z, en employant les coefficients de ces relations linéaires et homogènes, qui lient les systèmes fondamentaux d'intégrales appartenant aux divers points singuliers de l'équation différentielle, relations que j'ai développées dans le *Journal de M. Borchardt,* tome LXXV, page 208.

Enfin j'ajoute quelques théorèmes particuliers, parmi lesquels je ne mentionne ici que le suivant : *Les nombres rationnels qui représentent les racines des équations fondamentales déterminantes, appartenant aux divers points singuliers de l'équation* $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$ *et à* $z = \infty$, *étant réduits à leur plus simple expression, si l'un des dénominateurs surpasse le nombre* 10, *la proposée n'a pas d'intégrale algébrique, à moins cependant que la racine d'une fonction rationnelle ne satisfasse à cette équation ou à l'équation en* y^2.

Heidelberg, janvier 1876.

Supplément au Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre;

Par M. Émile MATHIEU [*].

Explication de l'extrême petitesse du rapport $\frac{B-A}{B}$.

17. Bien que l'on dût s'attendre à ce que le rapport $\frac{B-A}{B}$ fût notablement plus petit que l'aplatissement de la Terre, on peut être surpris de trouver que cette quantité est plus petite que le $\frac{1}{10000}$ de cet aplatissement, quand on songe à l'irrégularité de la profondeur des mers et aux différences de niveau des divers points de la surface terrestre, qui s'éloigne sensiblement de l'ellipsoïde, d'après les mesures directes qui ont été faites des degrés des méridiens; et l'on ne saurait admettre davantage que la Terre est exactement de révolution.

Cependant on peut s'expliquer l'égalité de B et A par les réflexions suivantes.

La Terre a été originairement fluide, et, si l'on imagine que dans cet état elle ait tourné autour d'un axe de direction invariable, elle était formée de couches ellipsoïdales de révolution; à cette époque, B était égal à A. Les cataclysmes qui ont ensuite eu lieu à la surface de la Terre, devenue solide, ont notablement altéré cette surface; mais l'égalité des deux moments principaux d'inertie A et B dans un corps n'implique pas nécessairement que ce corps soit de révolution, et l'on peut très-bien comprendre que, certains terrains s'étant élevés et d'autres abaissés, il s'est fait, en général, une compensation, en sorte que B — A ne soit pas resté nul, mais soit devenu une petite quantité.

Aussitôt qu'une différence entre B et A a eu lieu, l'action du Soleil et de la Lune a produit un petit balancement de l'axe de rotation de la

[*] *Voir* ce Recueil, même tome, p. 33.

Terre autour de l'axe de son plus grand moment d'inertie. Ces petites oscillations ont produit des mouvements intérieurs de la masse en fusion qui, par ses frottements, ont dû tendre à éteindre ces oscillations; mais, comme elles ne pouvaient disparaître que par l'égalité de B et A, la masse liquide intérieure a dû lentement soulever ou abaisser des parties de la croûte terrestre, ainsi que cela a encore lieu maintenant, de manière à rétablir l'égalité des deux moments d'inertie.

Laplace, dans sa *Mécanique céleste* (Ire Partie, Liv. III, n° 32) et dans son *Exposition du système du monde* (Note VII), suppose que les fluides qui recouvrent la Terre ont détruit par leur frottement et par leur résistance les oscillations primitives de son axe de rotation. Cette hypothèse peut paraître vraisemblable quand on ne sait pas que les deux moments principaux par rapport aux axes de l'équateur doivent être égaux pour que ces oscillations disparaissent; mais il est évident que les mouvements intérieurs de la Terre peuvent, plutôt que les mouvements des fluides à sa surface, amener l'égalité des deux moments d'inertie A et B.

Ainsi, en résumant, nous avons trouvé d'abord que la quantité $\frac{B-A}{B}$, si elle n'est pas nulle, est si petite que les résultats de toutes les observations astronomiques sont les mêmes que si B était égal à A; en second lieu, il résulte des réflexions qui précèdent qu'il y a lieu de penser que $\frac{B-A}{B}$ doit être encore bien au-dessous de la limite que nous avons calculée par cette considération au n° 15.

Pour nous représenter la petitesse du rapport $\frac{B-A}{B}$ trouvé dans ce numéro, comparons la Terre à un ellipsoïde homogène de même masse dont les demi-axes, peu différents entre eux, soient désignés par a, b, c, a étant le plus grand et c le plus petit. En représentant par M la masse de l'ellipsoïde, on aura, pour les moments principaux d'inertie de cet ellipsoïde par rapport aux axes $2a$ et $2b$,

$$A = \frac{M(b^2+c^2)}{5}, \quad B = \frac{M(a^2+c^2)}{5}$$

et par suite

$$\frac{B-A}{B} = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2};$$

on aura donc à très-peu près

$$\frac{B - A}{B} = \frac{a - b}{a}.$$

En mettant pour a le rayon de la Terre et supposant $a - b = 2^m$, nous aurons

$$\frac{B - A}{B} = \frac{2}{6366600} = \frac{1}{3183300}.$$

Donc la quantité $\frac{B - A}{B}$ relative à la Terre est plus petite que la même quantité relative à un ellipsoïde dont les trois axes différeraient peu et les demi-axes a et b seulement de 2 mètres, résultat bien remarquable quand on songe que les différences de niveau des divers points de la surface du globe terrestre peuvent s'élever à 8000 mètres.

Les oscillations des mers, par suite du phénomène du flux et du reflux, doivent faire varier la quantité $\frac{B - A}{B}$, dont la valeur moyenne est nulle; mais il n'en peut résulter que des oscillations insensibles de l'axe de rotation. En effet, les plus hautes marées des côtes de France situées sur l'océan Atlantique sont de 3 mètres; si l'on suppose le globe terrestre formé entièrement d'eau et que l'on prenne 3 mètres pour la plus grande différence de hauteur de la mer, sur deux diamètres de l'équateur perpendiculaires entre eux, on aura

$$\frac{B - A}{B} = \frac{3}{6366600};$$

mais, comme la densité moyenne de la Terre est égale à cinq fois celle de l'eau, cette quantité devrait encore être divisée par 5; elle est donc extrêmement petite.

La démonstration de l'égalité de B et A par l'observation des oscillations du pendule ou par la détermination de la longueur du pendule qui bat la seconde exigerait un nombre immense d'observations faites à la surface de la Terre et qu'il faudrait soumettre ensuite au calcul; mais il semble même par ce moyen à peu près impossible d'atteindre à la précision à laquelle je suis parvenu. On doit remarquer que ma méthode pour étudier le rapport $\frac{B-A}{B}$ consiste à prendre pour pendule la Terre elle même, et de l'invariabilité de son axe de rotation je conclus l'égalité de A et B.

Pour terminer, remarquons cette phrase de Poisson (*Sur le mouvement d'un corps solide, Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XIV, p. 298; 1838) : « Il est bien remarquable que les mêmes forces qui font décrire dans le ciel aux pôles de rotation de la Terre un cercle d'une grande étendue, à la vérité dans un temps très-long, soient impuissantes pour changer leur position à la surface et qu'elles n'y produisent que des oscillations très-rapides dont l'étendue est insensible. »

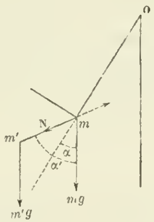
D'après les recherches précédentes, l'explication du fait signalé par Poisson est facile. Les inégalités de la précession ont en effet, comme on sait, pour coefficient, la quantité $\frac{2C-A-B}{2C}$, qui a une valeur sensible, tandis que les inégalités du déplacement des pôles à la surface de la Terre ont pour coefficient la quantité $\frac{B-A}{B}$, qui est nulle ou insensible.

Note sur le mouvement du système de deux pendules simples, dont l'un est attaché à un point fixe et l'autre à la masse qui termine le premier;

Par M. H. RESAL.

Soient O le point fixe du premier pendule; l, m sa longueur et sa masse; α son inclinaison sur la verticale.

Nous affecterons d'un accent les quantités qui se rapportent au second pendule mm', en désignant par N l'action qu'il exerce sur la masse m.



Nous aurons d'abord

$$(1) \qquad ml\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\sin\alpha + \mathrm{N}\sin(\alpha' - \alpha);$$

puis, d'après la théorie du mouvement relatif,

$$(2) \qquad m'l'\frac{d^2\alpha'}{dt^2} = -m'g\sin\alpha' - m'\cos(\alpha' - \alpha)\,l\,\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$(3) \qquad \mathrm{N} = m'g\cos\alpha' + m'l'\frac{d\alpha'^2}{dt^2} - m'\sin(\alpha' - \alpha)\,l\,\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Si, comme nous le supposerons dorénavant, les angles α et α' sont suffisamment petits, nous pourrons prendre $N = m'g$, et, en posant

$$\frac{m'}{m} = \mu, \quad \frac{l'}{l} = \lambda,$$

les équations (1) et (2) deviendront

$$(1') \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha + \mu\frac{g}{l}(\alpha' - \alpha) = -\frac{g}{l}(1+\mu) + \frac{\mu g}{l}\alpha',$$

$$(2') \qquad \lambda\frac{d^2\alpha'}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha' - \frac{d^2\alpha}{dt^2};$$

elles seront satisfaites par des valeurs de la forme

$$\alpha = M\cos k(t+\varepsilon), \quad \alpha' = M'\cos k(t+\varepsilon),$$

M, M', k, ε étant des constantes.

En substituant, on trouve

$$(3) \qquad M' = \frac{M}{\mu}\left(1 + \mu - k^2\frac{l}{g}\right).$$

$$(4) \qquad \lambda k^4 - (1+\mu)(1+\lambda)\frac{g}{l}k^2 + (1+\mu)\frac{l}{g} = 0;$$

d'où

$$(5) \quad k = \sqrt{\frac{g}{l}\left[\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{2\lambda}\right] \pm \sqrt{\frac{1+\mu}{\lambda}\left[\frac{(1+\mu)(1+\lambda)^2}{4\lambda} - 1\right]}}.$$

A l'inspection de l'équation (4), on reconnaît que les deux valeurs qu'elle donne pour k^2 sont, ou réelles et positives, ou imaginaires. La condition pour qu'elles soient réelles est exprimée par

$$(1-\lambda)^2 + (1+\lambda)^2\mu > 0,$$

et sera toujours satisfaite.

Ainsi l'équation (4) a quatre racines réelles égales deux à deux et de signes contraires; mais il nous suffit de considérer les racines positives k_1, k_2. Soient M_1, M'_1 et M_2, M'_2 les valeurs de M et M′, qui leur correspondent respectivement, et ε_1, ε_2 celle de ε. Posons

$$h_1 = \frac{1 + \mu - k_1^2 \frac{l}{g}}{\mu}, \quad h_2 = \frac{1 + \mu - k_2^2 \frac{l}{g}}{\mu}.$$

Les intégrales des équations (1′) et (2′) seront

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha = M_1 \cos k_1 (t + \varepsilon_1) + M_2 \cos k_2 (t + \varepsilon_2), \\ \alpha' = h_1 M'_1 \cos k_1 (t + \varepsilon_1) + h_2 M_2 \cos k_2 (t + \varepsilon_2). \end{cases}$$

Chacun des pendules exécutera donc, en général, simultanément deux oscillations dont les durées seront différentes, mais qui seront respectivement les mêmes pour les deux pendules. Le mouvement oscillatoire ne peut être simple, quelles que soient les conditions initiales, pour les deux pendules, que si $\lambda = 0$, c'est-à-dire quand le système se réduit à un seul pendule.

Il serait encore simple pour le pendule inférieur si l'un des coefficients h_1, h_2 pouvait s'annuler, ou si l'équation (4) pouvait être vérifiée par

$$k^2 = (1 + \mu) \frac{g}{l};$$

mais cela ne peut avoir lieu que si $\mu = 0$, ce qui réduit encore le système à un seul pendule.

Les deux oscillations coexisteront ainsi dans les deux pendules sans qu'aucune d'elles puisse s'annuler, sauf dans le cas où les conditions initiales du mouvement sont telles que l'une des constantes M_1, M_2 est nulle.

Lorsque les vitesses initiales sont nulles à l'origine du temps, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= M_1 \cos k_1 t + M_2 \cos k_2 t, \\ \alpha' &= h_1 M_1 \cos k_1 t + h_2 M_2 \cos k_2 t. \end{aligned}$$

Soient α_0, α'_0 les écarts à l'origine du temps du pendule supérieur, α'_0 du pendule inférieur; si les deux écarts satisfont à la relation

$\alpha'_0 = \alpha_0 h_1$, nous aurons

$$\alpha = \alpha_0 \cos k_1 t,$$

$$\alpha' = \alpha'_0 \cos k_1 t,$$

et les pendules exécuteront des oscillations simples dans le même temps.

Proposons-nous maintenant de voir si la durée d'une oscillation peut être double de celle de l'autre, ou si l'on peut avoir $k_2^2 = 4 k_1^2$; d'après l'équation (4), on aurait

$$5 k_1^2 = (1 + \mu)(1 + \lambda)\frac{g}{l},$$

$$4 k_1^4 = (1 + \mu)\frac{g^2}{l^2};$$

d'où, par l'élimination de k_1^2,

$$4\lambda^2(1 + \mu) + \lambda[8(1 + \mu) - 25] + 4(1 + \mu) = 0.$$

Si l'on considère λ comme inconnue, cette équation ne peut avoir ses deux racines réelles que si $\mu < \frac{9}{16}$. Ainsi, si cette condition est remplie, on aura pour le pendule inférieur deux longueurs qui rendront *harmoniques*, si l'on peut s'exprimer ainsi, les deux oscillations; ces deux longueurs seront égales dans le cas où $\mu = \frac{9}{16}$.

Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes;

Par M. F. TISSERAND.

La détermination de l'attraction exercée par un ellipsoïde homogène sur un point extérieur a provoqué les recherches des plus grands géomètres. Laplace, le premier, a donné la solution de ce problème en démontrant que les potentiels de deux ellipsoïdes homofocaux, relatifs à un même point extérieur, sont entre eux comme les masses de ces ellipsoïdes; on ramène ainsi la recherche de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur à celle de l'attraction d'un autre ellipsoïde sur un point de sa surface, question très-facile à résoudre.

Le théorème en question a été démontré par Laplace au moyen d'une analyse très-compliquée; depuis, Ivory en a donné une solution très-simple. Avant ce travail d'Ivory, en 1792, Lagrange s'était proposé de donner une démonstration analytique simple du théorème de Laplace. Indiquons rapidement la voie suivie par Lagrange.

Soient f, g, h les coordonnées du point attiré, rapportées aux axes de l'ellipsoïde, dont les longueurs seront représentées par $2a$, $2b$, $2c$; soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'intérieur de l'ellipsoïde, Δ la distance de ce point au point attiré, ρ la distance de ce dernier point au centre de l'ellipsoïde; en supposant la densité de l'ellipsoïde égale à l'unité, on a, pour le potentiel de l'ellipsoïde,

$$(1) \qquad V = \int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{\Delta} = \int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2}},$$

où les intégrations s'étendent à toute la masse de l'ellipsoïde.

Ce qu'il faut démontrer, c'est que V est de la forme

$$(2) \qquad V = \tfrac{4}{3}\pi abc\varphi(a^2 - b^2,\ b^2 - c^2),$$

φ étant une fonction de

$$a^2 - b^2, \quad b^2 - c^2, \quad f, g, h.$$

Pour y parvenir, Lagrange introduit, au lieu des coordonnées rectangulaires f, g, h, les coordonnées polaires ρ, λ, μ du point attiré, par les formules

$$(3) \qquad h = \rho\cos\lambda, \quad g = \rho\sin\lambda\sin\mu, \quad f = \rho\sin\lambda\cos\mu,$$

et il développe $\frac{1}{\Delta}$ suivant les puissances descendantes de ρ, comme il suit :

$$(4) \qquad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} + \frac{P_1}{\rho^2} + \frac{P_2}{\rho^3} + \frac{P_3}{\rho^4} + \ldots,$$

où les quantités P_1, P_2,... sont des fonctions de λ et μ.

Il s'arrête au terme en $\frac{P_6}{\rho^7}$, substitue cette valeur de $\frac{1}{\Delta}$ dans l'expression (1) du potentiel, effectue l'intégration, et montre que l'expression qui en résulte pour V est bien de la forme (2). Mais ce résultat n'est démontré que jusqu'au terme en P_6; on ne voit pas du reste comment l'analyse de Lagrange s'étendrait au cas général. Le but du présent travail est de démontrer le théorème de Laplace, en suivant la voie tracée par Lagrange, d'une façon tout à fait générale.

Je commencerai par reproduire la démonstration de Lagrange pour P_2 et P_4.

Portant l'expression (4) de $\frac{1}{\Delta}$ dans (1), on a

$$(5) \qquad V = \frac{1}{\rho}\iiint dx\,dy\,dz + \frac{1}{\rho^2}\iiint P_1\,dx\,dy\,dz + \ldots.$$

Il est aisé de voir que, P_1, P_3, ... étant des fonctions entières impaires de x, y, z, les termes qui les contiennent dans la formule (5) ne donnent rien, les intégrales correspondantes pouvant se décomposer en éléments deux à deux égaux et de signes contraires. Posons, pour abréger, $dM = dx\,dy\,dz$, représentons par M la masse de l'ellipsoïde et nous aurons

$$(6)\qquad V = \frac{M}{\rho} + \frac{1}{\rho^3}\int P_2 dM + \frac{1}{\rho^5}\int P_4 dM + \frac{1}{\rho_7}\int P^6 dM + \ldots.$$

Pour effectuer les intégrations, Lagrange s'appuie sur la formule suivante, aisée à démontrer :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int x^{2m}y^{2n}z^{2l}dM \\ &\quad = \frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7.9\ldots(2m+2n+2l-3)} Ma^{2m}b^{2n}c^{2l}; \end{aligned} \right.$$

dans cette formule, les intégrations qui figurent au premier membre s'étendent à toute la masse de l'ellipsoïde.

Cela posé, P_2 est de la forme

$$(8)\qquad P_2 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy,$$

les coefficients A, B,... étant des fonctions de λ et de μ.

Les termes en yz, zx, xy ne donneraient rien dans les intégrations, et l'on aura

$$\int P_2 dM = A\int x^2 dM + B\int y^2 dM + C\int x^2 dM.$$

Appliquant la formule (7), on trouve

$$\int x^2 dM = \frac{Ma^2}{5},\quad \int y^2 dM = \frac{Mb^2}{5},\quad \int z^2 dM = \frac{Mc^2}{5}.$$

On aura donc

$$(9)\qquad \int P_2 dM = \frac{M}{5}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2).$$

Or la fonction $\frac{1}{\Delta}$ vérifie l'équation différentielle

$$(10)\qquad \frac{d^2\frac{1}{\Delta}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{\Delta}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{\Delta}}{dz^2} = 0.$$

En substituant dans cette équation la valeur (4) de $\frac{1}{\Delta}$, on en conclut que toutes les fonctions P vérifient l'équation

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 P}{dy^2} + \frac{d^2 P}{dz^2} = 0. \tag{11}$$

Si l'on porte en particulier dans cette équation la valeur (8) de P_2, on trouvera la relation

$$A + B + C = 0,$$

qui permettra d'écrire l'expression (9) de $\int P_2 dM$ comme il suit :

$$\int P_2 dM = \frac{M}{5}[A(a^2 - c^2) + B(b^2 - c^2)].$$

Cette expression est bien de la forme (2),

Passons au terme P_4; d'après ce qui a été dit, on verra que

$$\left\{\begin{array}{l} P_4 = Ax^4 + By^4 + Cz^4 + Dy^2z^2 + Ez^2x^2 + Fx^2y^2 \\ \qquad + \text{des termes impairs en } x, y \text{ ou } z. \end{array}\right. \tag{12}$$

Les termes impairs ne donneront rien dans l'intégration, et l'on aura, en employant la formule (7),

$$\int P_4 dM = \frac{M}{35}(3Aa^4 + 3Bb^4 + 3Cc^4 + Db^2c^2 + Ec^2a^2 + Fa^2b^2). \tag{13}$$

Or, en substituant l'expression (12) dans l'équation (11) et annulant les coefficients de x^2, y^2 et z^2, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} 6A + E + F = 0, \\ 6B + F + D = 0, \\ 6C + D + E = 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Portant dans (13) les valeurs de A, B, C, tirées des relations (14), il vient

$$\int P_4 dM = -\frac{M}{70}[D(b^2 - c^2)^2 + E(c^2 - a^2)^2 + F(a^2 - b^2)^2],$$

expression qui est bien encore de la forme (2), car on peut y remplacer $a^2 - c^2$ par $(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2)$.

En opérant de la même façon, Lagrange démontre encore le théorème pour P_6, mais les calculs se compliquent et il semble difficile d'arriver ainsi au résultat cherché dans le cas général.

Je vais démontrer que, i désignant un entier positif quelconque, on a

$$(15) \qquad \int P2i\,dM = M\psi(a^2 - b^2,\ b^2 - c^2).$$

On a en effet

$$(16) \qquad P2i = \Sigma A^{(i)}m,n,l\,x^{2m}y^{2n}z^{2l} + \Sigma B\,x^{2m'+1}y^{2n'+1}z^{2l'},$$

les nombres entiers m, n, l, m', n', l' vérifiant les relations

$$2m + 2n + 2l = 2i,$$
$$2m' + 2n' + 2l' = 2i - 2.$$

Dans la formule (16), on devrait faire entrer aussi des termes en

$$x^{2m'}y^{2n'+1}z^{2l'+1}, \quad x^{2m'+1}y^{2n'}z^{2l'+1};$$

mais on verra que tous ces termes nous sont inutiles.

Dans l'équation

$$(17) \qquad \frac{d^2P2i}{dx^2} + \frac{d^2P2i}{dy^2} + \frac{d^2P2i}{dz^2} = 0$$

substituons la valeur (16) de $P2i$, nous trouverons trois termes en $x^{2m}y^{2n}z^{2l}$, provenant des termes qui ont pour coefficients

$$A^{(i)}m+2,n,l, \quad A^{(i)}m,n+2,l, \quad A^{(i)}m,n,l+2;$$

la somme de ces termes devra être nulle, ce qui nous donne la relation

$$(18) \qquad (2m+2)(2m+1)A^{(i)}m+1,n,l + (2n+2)(2n+1)$$
$$A^{(i)}m,n+1,l + (2l+2)(2l+1)A^{(i)}m,n,l+1 = 0.$$

Or on a, en partant de l'équation (16),

$$\int P2i\,dM = \Sigma A^{(i)}m,n,l \int x^{2m}y^{2n}z^{2l}\,dM;$$

et, en appliquant la formule (7),

$$(19)\quad \int P2i\,dM = \Sigma A^{(i)}m,n,l\,\frac{[1.3\ldots(2m-1)][1.3\ldots(2n-1)][1.3\ldots(2l-1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+3)}\,a^{2m}b^{2n}c^{2l}M.$$

Il s'agit de montrer que, dans le second membre, le coefficient K de M est de la forme

$$(20)\qquad K = F(a^2-b^2,\ a^2-c^2,\ b^2-c^2).$$

Or une semblable fonction vérifie l'équation

$$(21)\qquad \frac{dK}{d(a^2)}+\frac{dK}{d(b^2)}+\frac{dK}{d(c^2)} = 0;$$

et réciproquement, si le coefficient K vérifie identiquement l'équation aux dérivées partielles (21), K sera de la forme (20), car l'expression (20), dans laquelle F désigne une fonction arbitraire, est l'intégrale générale de l'équation (21). Le tout est donc de prouver que la fonction

$$(22)\quad K = \Sigma A^{(i)}m,n,l\,\frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+3)}\,a^{2m}b^{2n}c^{2l}$$

vérifie l'équation (21).

Substituons donc cette valeur de K dans (21), et cherchons à distinguer dans le résultat de la substitution les termes en $a^{2m}b^{2n}c^{2l}$; nous en trouverons trois ayant respectivement pour coefficients

$$\frac{[1.3.5\ldots(2m+1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+5)}(m+1)A^{(i)}m+1,n,l,$$

$$\frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n+1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+5)}(n+1)A^{(i)}m,n+1,l,$$

$$\frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l+1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+5)}(l+1)A^{(i)}m,n,l+1.$$

La somme de ces trois coefficients est, à un facteur près,

$$\begin{gathered}(2m+2)(2m+1)A^{(i)}m+1,n,l+(2n+2)(2n+1)A^{(i)}m,n+1,l\\ +(2l+2)(2l+1)A^{(i)}m,n,l+1,\end{gathered}$$

quantité égale à zéro, d'après la relation (18).

Donc la fonction K vérifie identiquement l'équation (21), et le théorème est démontré d'une façon tout à fait générale.

Explication d'un passage de la Mécanique analytique *de Lagrange relatif à la composition des moments en Statique;*

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

On sait que les formules qui expriment les lois de cette composition sont démontrées dans la première Partie de la *Mécanique analytique,* Section III, article 17 (2^e édition, t. I, 1811). Lagrange y est conduit d'abord par une analyse très-directe, mais à laquelle on peut reprocher d'exiger d'assez longs calculs. Il indique ensuite, en terminant cet article 17, une autre manière de parvenir à cette composition :

« On aurait pu, dit-il, la déduire immédiatement de la composition des rotations instantanées, en substituant les moments aux rotations qu'*elles* produisent, comme Varignon a substitué les forces aux mouvements rectilignes. »

Il a été plusieurs fois question de ce passage dans le volume de ce *Journal,* pour l'année 1875 (3^e série, t. I). On a vu notamment, p. 97, que Poinsot l'a critiqué, comme si l'illustre auteur avait écrit *ils* au lieu de *elles* que j'ai souligné; puis (p. 182 et 263) qu'il a été réimprimé avec *ils*, au lieu de *elles*, dans la troisième édition de la *Mécanique analytique*.

Or il ne fallait pas se permettre de faire ce changement. En effet, les expressions dont se sert Lagrange sont trop claires et trop bien expliquées par la théorie qu'il rappelle pour qu'un malentendu soit possible.

Nous savons, par cette théorie de la composition des rotations instantanées, que toute rotation instantanée $d\theta$ d'un système de points de forme invariable autour d'un axe donné oh produit autour de trois autres axes ol, om, on, se coupant à angles droits en un point o du premier, trois rotations partielles $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, et que les angles λ, μ, ν formés par l'axe de la rotation $d\theta$ avec les axes de ces derniers, sont tels que l'on a

$$\cos\lambda = \frac{d\psi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}}, \cos\mu = \frac{d\omega}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}}, \cos\nu = \frac{d\varphi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}}.$$

Ce que Lagrange annonce, c'est que, en substituant à ces trois rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ ainsi produites par la rotation instantanée $d\theta$, les moments L, M, N des forces par rapport à leurs axes ol, om, on, on obtiendra immédiatement les relations auxquelles sa première démonstration l'a conduit. Par cette substitution, les formules ci-dessus deviennent en effet

$$\cos\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \cos\mu = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \cos\nu = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}};$$

ces relations sont précisément celles dont il s'agit.

Cette substitution exige que les trois rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ soient proportionnelles respectivement aux moments donnés L, M, N. Or Lagrange commence sa première démonstration par supposer expressément qu'il en est ainsi. D'ailleurs on peut toujours satisfaire à cette condition en assignant à l'axe de la rotation instantanée $d\theta$ une direction convenable. Cette direction est celle-là même que déterminent les valeurs ci-dessus de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ en fonction des moments L, M, N.

C'était donc bien *elles* qu'il fallait, et non pas *ils*.

Mémoire sur les covariants des formes binaires;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Les travaux de MM. Cayley et Clebsch ont montré que les covariants des fonctions binaires ont pour propriété caractéristique de pouvoir s'exprimer par des produits symboliques de déterminants et de facteurs linéaires.

Mais une même expression symbolique peut revêtir un grand nombre de formes distinctes. On se trouve donc en face de la question suivante :

« Discerner, parmi les diverses formes dont une expression symbolique est susceptible, celle qu'il convient de regarder comme canonique, et indiquer un moyen régulier pour ramener les autres formes à celle-là. »

La solution générale de ce problème paraît présenter de sérieuses difficultés. M. P. Gordan a fait néanmoins dans cette voie un premier pas fort important, en établissant la proposition fondamentale suivante :

« Les covariants d'un système de fonctions binaires A, B,... peuvent s'exprimer en fonction entière d'un nombre limité de covariants indépendants. »

L'analyse par laquelle cet habile géomètre a démontré ce résultat montre bien qu'il existe une limite au nombre des covariants indépendants, mais n'en donne pas immédiatement la valeur. La détermination de cette valeur fait l'objet principal de ce Mémoire.

Il est divisé en huit Sections :

Dans la première Section, nous établissons les principes de la notation symbolique.

Dans la deuxième, nous rappelons la propriété caractéristique des covariants, et nous établissons les identités à l'aide desquelles on peut transformer les unes dans les autres les diverses expressions symboliques d'un même covariant.

Dans la troisième, nous montrons comment on peut introduire dans le calcul les symboles des covariants.

La quatrième Section est consacrée à l'étude de la composition (*Uberschiebung*) des covariants.

Ces quatre Sections ne renferment que des résultats déjà établis par divers géomètres, et principalement par M. Gordan. Mais il nous a paru d'autant plus nécessaire d'exposer ce point de départ de notre analyse, qu'il ne se trouve développé, à notre connaissance, dans aucun ouvrage français.

Dans la cinquième Section, nous abordons l'étude des covariants du troisième degré, et nous assignons leur forme canonique. De ce premier résultat découlent toutes les propositions établies dans la suite du Mémoire.

Nous montrons ensuite (Section VI) comment un covariant quelconque peut être décomposé en trois parties, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$. L'idée de cette décomposition est encore empruntée à M. Gordan. Mais nous avons beaucoup précisé la forme des covariants $\mathfrak{R}$; ce qui nous a permis de les exprimer en fonction entière de certains covariants indépendants R, d'une forme très-simple, et dont nous avons resserré le degré dans des limites assez étroites (Section VII).

Revenant ensuite à un covariant quelconque (Section VIII), nous établissons, par des considérations nouvelles, ce théorème, d'où découle, comme corollaire, celui de M. Gordan : *Les covariants d'un système de formes* A, B,..., *en nombre limité ou illimité, mais dont le degré ne surpasse pas une certaine limite, peuvent s'exprimer en fonction entière de covariants indépendants, dont l'ordre et le poids restent inférieurs à une certaine limite.*

§ I. — Notation symbolique.

1. Soit

$$(1)\quad \begin{cases} A = A_0 x_1^m + m A_1 x_1^{m-1} x_2 + \dfrac{m(m-1)}{2} A_2 x_1^{m-2} x_2^2 + \ldots + A_m x_2^m, \\ B = B_0 x_1^n + n B_1 x_1^{n-1} x_2 + \dfrac{n(n-1)}{2} B_2 x_1^{n-2} x_2 + \ldots + B_n x_2^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

un système de formes algébriques binaires, ayant respectivement pour ordres m, n,..., et soit

$$(2)\qquad F(A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_n, \ldots, x_1, x_2)$$

une fonction entière et homogène du degré α par rapport à $A_0, \ldots, A_m$; entière et homogène du degré β par rapport à $B_0, \ldots, B_n$; etc.; et enfin entière et homogène d'ordre ξ par rapport aux variables x_1, x_2.

Supposons, pour fixer les idées, que α soit > 0; effectuons sur la fonction F l'opération

$$(3)\qquad \frac{1}{\alpha}\left(A'_0 \frac{\partial}{\partial A_0} + A'_1 \frac{\partial}{\partial A_1} + \ldots + A'_m \frac{\partial}{\partial A_m}\right).$$

Le résultat de cette opération sera une nouvelle fonction F′, qu'on appelle la *polaire* ou l'*émanant* de F. Cet émanant est évidemment linéaire par rapport aux nouveaux paramètres $A'_0, \ldots, A'_m$, et son degré par rapport à $A_0, \ldots, A_m$ est réduit à $\alpha - 1$. D'ailleurs, il résulte du théorème des fonctions homogènes, que, si l'on posait dans F′

$$A'_0 = A_0,\ \ldots,\ A'_m = A_m,$$

F′ deviendrait identique à F.

Si $\alpha - 1 > 0$, on exécutera sur F′ l'opération

$$\frac{1}{\alpha - 1}\left(A''_0 \frac{\partial}{\partial A_0} + \ldots + A''_m \frac{\partial}{\partial A_m}\right),$$

et l'on obtiendra un nouvel émanant F″ linéaire par rapport à $A''_0, \ldots, A''_m$, ainsi que par rapport à $A'_0, \ldots, A'_m$, et du degré $\alpha - 2$ seulement par rapport à $A_0, \ldots, A_m$. D'ailleurs, en posant

$$A''_0 = A'_0 = A_0, \ \ldots, \ A''_m = A'_m = A_m,$$

F'' deviendrait identique à F.

Si $\alpha - 2 > 0$, on poursuivra de même, et l'on arrivera enfin à un dernier émanant F^α, qui ne contiendra plus les coefficients $A_0, \ldots, A_m$, mais sera linéaire par rapport à α séries de paramètres,

$$A'_0, \ldots, A'_m; \ldots; \ A_0^{(\alpha)}, \ldots, A_m^{(\alpha)}.$$

Cet émanant reproduira d'ailleurs F si l'on y pose

$$A'_0 = \ldots = A_0^{(\alpha)} = A_0, \ \ldots, \ A'_m = \ldots = A_m^{(\alpha)} = A_m.$$

Enfin, F étant homogène et du degré β par rapport à $B_0, \ldots, B_n$, il en est évidemment de même pour chacun des émanants successifs $F', \ldots, F^\alpha$.

Supposons $\beta > 0$. Par une suite d'opérations toutes semblables à celles qui nous ont amenés de F à F^α, on déduira de F^α un nouvel émanant $F^{\alpha+\beta}$, qui ne contiendra plus les coefficients $B_0, \ldots, B_n$, mais contiendra, en échange, β séries de nouveaux paramètres

$$B'_0, \ldots, B'_n; \ldots; \ B_0^{(\beta)}, \ldots, B_n^{(\beta)},$$

et sera linéaire par rapport à chacune d'elles.

Quel que soit le nombre des fonctions A, B, ..., on arrivera, en poursuivant ces opérations, à un dernier émanant $\mathfrak{F}$, indépendant des coefficients $A_0, \ldots, A_m$; $B_0, \ldots, B_n$; ..., et linéaire par rapport à $\alpha + \beta + \ldots$ séries de paramètres

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A'_0, A'_1, \ldots, A'_m; \ldots; \ A_0^{(\alpha)}, A_1^{(\alpha)}, \ldots, A_m^{(\alpha)}, \\ B'_0, B'_1, \ldots, B'_n; \ldots; \ B_0^{(\beta)}, B_1^{(\beta)}, \ldots, B_n^{(\beta)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

2. Substituons maintenant dans $\mathfrak{F}$, à la place de ces paramètres, les expressions suivantes :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1'^m, a_1'^{m-1} a'_2, \ldots, a_2'^m; \ldots; \ a_1^{(\alpha)m}, a_1^{(\alpha)m-1} a_2^{(\alpha)}, \ldots, a_2^{(\alpha)m}, \\ b_1'^n, b_1'^{n-1} b'_2, \ldots, b_2'^n; \ldots; \ b_1^{(\beta)n}, b_1^{(\beta)n-1} b_2^{(\beta)}, \ldots, b_2^{(\beta)n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Nous obtiendrons une fonction Φ, entière et homogène du degré m par rapport à chacun des α couples de paramètres $a'_1, a'_2; \ldots; a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}$; du degré n par rapport à chacun des β couples de paramètres $b'_1, b'_2; \ldots; b_1^{(\beta)}, b_2^{(\beta)}; \ldots$; et enfin d'ordre ξ par rapport aux variables x_1, x_2; car les opérations successives par lesquelles on a passé de F à Φ n'ont pu évidemment altérer l'ordre de la fonction par rapport à ces variables.

3. Réciproquement, la fonction Φ étant donnée, il sera aisé de remonter à la fonction F qui lui a donné naissance, et cela sans aucune ambiguïté. En effet, on revient de Φ à $\mathfrak{F}$ en remplaçant les produits (5) par leurs valeurs (4), puis de $\mathfrak{F}$ à F en posant

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} A'_0 = \ldots = A_0^{(\alpha)} = A_0;\ \ldots;\ A'_m = \ldots = A_m^{(\alpha)} = A_m, \\ B'_0 = \ldots = B_0^{(\beta)} = B_0;\ \ldots;\ B'_n = \ldots = B_n^{(\beta)} = B_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

La fonction Φ, liée à F comme il vient d'être exposé, se nomme l'*expression symbolique de* F.

4. Soient, comme précédemment, A, B,..., L,... des fonctions entières et homogènes de x_1, x_2, de degrés $m, n, \ldots, p, \ldots$; et soit

$$(7)\qquad F(A_0, A_1, \ldots;\ B_0, B_1, \ldots;\ \ldots;\ L_0, L_1, \ldots;\ \ldots;\ x_1, x_2)$$

une fonction entière et homogène par rapport à x_1, x_2 et par rapport aux coefficients de chacune de ces fonctions. Particularisons la fonction L et les suivantes, en admettant que leurs coefficients, au lieu d'être des quantités arbitraires, soient des fonctions entières et homogènes des coefficients de chacune des fonctions précédentes A, B,.... En remplaçant, dans la fonction F, les coefficients $L_0, L_1, \ldots; \ldots$ par leurs valeurs, on obtiendra une nouvelle fonction

$$(8)\qquad F'(A_0, A_1, \ldots;\ B_0, B_1, \ldots;\ \ldots;\ x_1, x_2).$$

5. Supposons que les fonctions F, L,... ne soient pas données

immédiatement, mais qu'on connaisse leurs expressions symboliques

(9) $\Phi(a'_1, a'_2;\ a''_1, a''_2;\ldots;\ b'_1, b'_2;\ldots;\ l'_1, l'_2;\ l''_1, l''_2;\ldots;\ x_1, x_2)$,

(10) $\Lambda(a'_1, a'_2;\ \ldots;\ \ldots;\ b'_1, b'_2;\ldots;\ x_1, x_2)$,

. . . .,

et proposons-nous de déterminer directement l'expression symbolique φ de la fonction F'.

On y parviendra comme il suit :

Substituons, dans la fonction Φ, aux produits

$$l_1'^p,\ l_1'^{p-1}l'_2,\ldots,$$

les coefficients de la fonction

(11) $$\Lambda(\mathrm{a}'_1, \mathrm{a}'_2;\ldots;\ \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2;\ldots;\ x_1, x_2)\ [*].$$

Nous obtiendrons une nouvelle expression symbolique

(12) $$\left\{\begin{array}{l}\Phi_1(a'_1, a'_2;\ a''_1, a''_2;\ldots;\ \mathrm{a}'_1, \mathrm{a}'_2;\ldots;\ b'_1, b'_2;\ldots;\\ \qquad \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2;\ldots;\ l''_1, l''_2;\ldots;\ x_1, x_2),\end{array}\right.$$

et, si l'on remarque que la fonction (11) se transforme en L lorsqu'on y substitue, au lieu des expressions $\mathrm{a}_1'^m, \mathrm{a}_1'^{m-1}\mathrm{a}'_2,\ldots;\ldots;\ \mathrm{b}_1'^n, \mathrm{b}_1'^{n-1}\mathrm{b}'_2,\ldots;\ldots$, les coefficients $A_0, A_1,\ldots;\ B_0, B_1,\ldots;\ \ldots$, on voit que Φ_1 se transformera en F' si l'on y exécute cette substitution, et si, en outre, on remplace de même $a_1'^m, a_1'^{m-1}a'_2,\ldots;\ a_1''^m, a_1''^{m-1}a''_2,\ldots;\ldots$ par $A_0, A_1,\ldots;$ $b_1'^n, b_1'^{n-1}b'_2,\ldots$, par $B_0, B_1,\ldots$; etc.

Remplaçons de même, dans Φ_1, les produits $l_1''^p, l_1''^{p-1}l''_2,\ldots$ par les coefficients de la fonction

$$\Lambda(\alpha'_1, \alpha'_2,\ldots;\ \beta'_1, \beta'_2,\ldots;\ x_1, x_2).$$

On obtiendra une nouvelle expression symbolique Φ_2, débarrassée du couple de paramètres l''_1, l''_2, et contenant, en échange, les couples

---

[*] On change les paramètres $a'_1, a'_2;\ \ldots;\ b'_1, b'_2;\ \ldots$, qui entrent dans la fonction Λ, en $\mathrm{a}'_1, \mathrm{a}'_2;\ldots;\ \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2,\ldots$, pour éviter de les confondre avec les paramètres analogues qui existent déjà dans la fonction Φ.

de paramètres $\alpha'_1, \alpha'_2;\ldots;\ \beta'_1, \beta'_2;\ldots$, représentant respectivement les coefficients des fonctions A, B,....

Éliminant ainsi successivement les couples de paramètres l'_1, l'_2; l''_1, l''_2;..., qui correspondent aux coefficients des fonctions L,..., on arrivera enfin à une expression Φ', où tous les couples de paramètres représenteront les coefficients des fonctions A, B,.... Ce sera évidemment là l'expression symbolique cherchée.

§ II. — Forme symbolique des covariants.

6. Effectuons, sur les fonctions A, B,... considérées dans la Section précédente, une transformation linéaire

$$(13)\qquad x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\quad x_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2,$$

dont le déterminant $r = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ soit différent de zéro; et soient

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 y_1^m + m\mathcal{A}_1 y_1^{m-1} y_2 + \ldots + \mathcal{A}_m y_2^m,\\ \mathcal{B} = \mathcal{B}_0 y_1^n + n\,\mathcal{B}_1 y_1^{n-1} y_2 + \ldots + \mathcal{B}_n y_2^n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

les fonctions transformées de A, B,....

On dit que la fonction entière et homogène

$$F(A_0,\ldots, A_m;\ B_0,\ldots, B_n;\ldots;\ x_1, x_2),$$

considérée dans la même Section, est un *covariant* des fonctions A, B,... si l'on a identiquement

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} F(\mathcal{A}_0,\ldots, \mathcal{A}_m;\ \mathcal{B}_0,\ldots, \mathcal{B}_n;\ldots;\ y_1, y_2)\\ \quad = r^\rho F(A_0,\ldots, A_m;\ B_0,\ldots, B_n;\ldots;\ x_1, x_2), \end{array}\right.$$

ρ étant un entier.

On appelle *ordre* du covariant son degré par rapport aux variables x_1, x_2; *degré* du covariant, son degré total par rapport aux coefficients $A_0,\ldots, A_m;\ B_0,\ldots, B_n;\ldots$.

Les covariants d'ordre zéro se nomment *invariants*.

7. Nous avons vu que, quelle que soit la fonction F, elle a une expression symbolique de la forme

$$\Phi(a'_1, a'_2;\ a''_1, a''_2; \ldots;\ b'_1, b'_2; \ldots;\ x_1, x_2),$$

homogène et du degré m par rapport à chacun des α couples de paramètres $a'_1, a'_2;\ a''_1, a''_2; \ldots$; homogène et du degré n par rapport à chacun des β couples $b'_1,\ b'_2; \ldots$; et enfin homogène et d'ordre ξ par rapport aux variables $x_1,\ x_2$. Mais, si F est un covariant, son expression symbolique pourra être mise sous une forme remarquable, ainsi qu'il résulte du théorème suivant :

Théorème. — *Pour que la fonction* F *soit un covariant, il faut et il suffit que son expression symbolique puisse être mise sous la forme*

$$\Phi = k_1 \Pi_1 + k_2 \Pi_2 + \ldots + k_i \Pi_i + \ldots, \tag{16}$$

où $k_1,\ k_2, \ldots$ *sont des constantes, et* $\Pi_1,\ \Pi_2, \ldots$ *des produits de la forme*

$$\left\{\begin{array}{l} \Pi_i = (a'_1 a''_2 - a'_2 a''_1)^{\lambda_i} (a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1)^{\mu_i} (a''_1 b'_2 - a''_2 b'_1)^{\nu_i} \ldots \\ \qquad . (a'_1 x_1 + a'_2 x_2)^{\pi_i} (a''_1 x_1 + a''_2 x_2)^{\rho_i} (b'_1 x_1 + b'_2 x_2)^{\sigma_i} \ldots \end{array}\right. \tag{17}$$

Nous renverrons, pour la démonstration de ce théorème fondamental, à l'ouvrage classique de M. Clebsch (*Théorie des formes algébriques binaires*, Chap. Ier).

8. Nous nous bornerons à remarquer que les exposants λ_i, μ_i, $\nu_i, \ldots, \pi_i$, ρ_i, $\sigma_i, \ldots$ (lesquels sont des entiers non négatifs) ne sont pas complétement arbitraires.

En effet, Φ étant une fonction linéaire de $\Pi_1,\ \Pi_2, \ldots,\ \Pi_i, \ldots$, chacun de ces produits devra être, ainsi que la fonction Φ elle-même, homogène et du degré m par rapport à $a'_1,\ a'_2$; homogène et du degré m par rapport à $a''_1, a''_2; \ldots$; homogène et du degré n par rapport à b'_1, $b'_2; \ldots$; enfin, homogène et d'ordre ξ par rapport à $x_1,\ x_2$.

Mais le degré de Π_i par rapport à a'_1, a'_2 est évidemment égal à $\lambda_i + \mu_i + \ldots + \pi_i$, nombre des facteurs de Π_i qui contiennent ces lettres. On aura donc

$$(18)\qquad \lambda_i + \mu_i + \ldots + \pi_i = m.$$

De même, le nombre $\lambda_i + \nu_i + \ldots + \rho_i$ des facteurs qui contiennent a''_1, a''_2 devra être égal à m, etc.; le nombre $\mu_i + \nu_i + \ldots + \sigma_i$ des facteurs qui contiennent b'_1, b'_2 devra être égal à n, etc.; enfin, le nombre $\pi_i + \rho_i + \sigma_i + \ldots$ des facteurs qui contiennent x_1, x_2 sera égal à ξ.

9. On pose ordinairement, pour abréger,

$$(19)\qquad a'_1 a''_2 - a'_2 a''_1 = (a'a''),\quad (a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1) = (a'b'),\quad \ldots;$$

$$(20)\qquad a'_1 x_1 + a'_2 x_2 = a'_x,\quad a''_1 x_1 + a''_2 x_2 = a''_x,\quad \ldots.$$

Π_i prend alors la forme suivante :

$$(21)\qquad \Pi_i = (a'a'')^{\lambda_i}(a'b')^{\mu_i}(a''b')^{\nu_i}\ldots a'^{\pi_i}_x a''^{\rho_i}_x b'^{\sigma_i}_x \ldots.$$

Dans cette notation abrégée, la lettre a' tient lieu, à elle seule, des deux paramètres a'_1, a'_2, dont les puissances $a'^m_1, a'^{m-1}_1 a'_2, \ldots$ doivent être remplacées par les coefficients de la fonction A pour passer de l'expression symbolique Φ au covariant F qu'elle représente. On exprime brièvement cette liaison entre la lettre a' et la fonction A en disant que a' est un *symbole de la fonction* A; a'' sera un autre symbole de cette même fonction; b' sera de même un symbole de la fonction B, etc....

Le nombre des facteurs du produit Π_i où figure le symbole a' est égal à $\lambda_i + \mu_i + \ldots + \pi_i = m$. De même pour les autres symboles a'',... de la fonction A. Ceux de la fonction B figureront chacun dans n facteurs, etc.

10. La théorie serait dès à présent achevée, si l'expression symbolique d'un covariant donné ne pouvait être mise que d'une seule manière sous la forme $k_1\Pi_1 + \ldots + k_i\Pi_i + \ldots$. Mais il est aisé de voir qu'il n'en est pas ainsi.

Soient, en effet, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ des quantités quelconques, et posons, suivant nos conventions,

$$(22)\qquad a_1x_1 + a_2x_2 = a_x,\quad b_1x_1 + b_2x_2 = b_x,\quad c_1x_1 + c_2x_2 = c_x.$$

Éliminant x_1, x_2 entre ces équations, il viendra

$$(23)\qquad (ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = 0.$$

Si, dans cette identité, on remplace x_1, x_2 par d_2 et $-d_1$, d_1 et d_2 étant des quantités quelconques, on aura cette autre relation

$$(24)\qquad (ab)(cd) + (bc)(ad) + (ca)(bd) = 0;$$

donc tout produit symbolique Π_i qui contiendra en facteur $(ab)c_x$ ou $(ab)(cd)$ pourra être transformé en une somme de deux produits analogues en remplaçant $(ab)c_x$ ou $(ab)(cd)$ par leurs valeurs tirées des équations (23) et (24).

11. Une autre source de transformation est la suivante. Soit donné un covariant, dans l'expression symbolique duquel figurent plusieurs symboles a', a'',... d'une même fonction A; on pourra permuter entre eux ces symboles sans altérer le covariant, car la permutation de a' avec a'', par exemple, n'aura d'autre effet que de changer les produits $a_1'^m$, $a_1'^{m-1}a_2'$,... en $a_1''^m$, $a_1''^{m-1}a_2''$,..., et réciproquement, dans l'expression symbolique développée. Mais, pour calculer le covariant, il faut remplacer ces deux sortes de produits par les mêmes quantités A_0, A_1,...; donc le résultat final sera le même.

12. Il importe d'ailleurs, dans l'analyse des diverses formes que l'on peut donner à l'expression symbolique d'un covariant, de ne pas user indifféremment des deux modes de transformation ci-dessus, mais de distinguer avec soin les effets de chacun d'eux, et de ne recourir au second procédé qu'après avoir tiré du premier toutes ses conséquences.

Nous agirons donc, dans ce qui va suivre, lorsque nous voudrons transformer des covariants, comme si les symboles a', a'',..., b',... qui figurent dans leur expression appartenaient tous à des fonctions distinctes A', A'',..., B',..., réservant pour une autre occasion l'examen des réductions qui se produisent lorsque plusieurs de ces fonctions, telles que A', A''..., deviennent identiques.

§ III. — Symboles des covariants.

13. Soient A, B,..., L,... des fonctions entières et homogènes de x_1, x_2, de degrés m, n,..., p,...: et soit

$$F(A_0, A_1, \ldots; B_0, B_1, \ldots; L_0, L_1, \ldots; \ldots; x_1, x_2)$$

un de leurs covariants.

Particularisons les fonctions L,..., de telle sorte qu'elles deviennent elles-mêmes des covariants des fonctions A, B,.... Si nous remplaçons, dans F, les coefficients L_0, L_1,...; ... par leurs valeurs, nous obtiendrons une nouvelle fonction

$$F'(A_0, A_1, \ldots; B_0, B_1, \ldots; \ldots; x_1, x_2).$$

Théorème. — F′ *sera un covariant des fonctions* A, B,....

14. *Démonstration.* — La fonction F étant un covariant de A, B,.... L,..., son expression symbolique Φ sera de la forme

$$\Phi = k_1 \Pi_1 + k_2 \Pi_2 + \ldots,$$

k_1, k_2,... étant des constantes, et Π_1, Π_2,... des produits de déterminants et de facteurs linéaires, formés avec les symboles a', a'',...: b', b'',...; l', l'',...; ... des fonctions A, B,..., L,... (n° **7**).

De même, les fonctions L,... étant des covariants de A, B,..., leurs expressions symboliques Λ,... seront de la forme

$$\Lambda = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \ldots, \ldots,$$

Ψ_1, Ψ_2,... étant des produits de déterminants et de facteurs linéaires formés avec les symboles des fonctions A, B,....

Cela posé, en appliquant la méthode indiquée au n° **5**, nous pourrons éliminer successivement les symboles l', l'',... des fonctions L,... qui figurent dans Φ, et nous obtiendrons ainsi une suite d'expressions Φ_1, Φ_2,..., dont la dernière, Φ′, ne contenant plus que les symboles de A, B,..., sera l'expression symbolique de F′.

Or, Φ étant, par hypothèse, une fonction linéaire de produits symboliques, nous verrons qu'il en sera de même de Φ_1. Le même raisonnement étant appliqué à Φ_1, on en tirera la même conséquence pour Φ_2, etc.; donc enfin Φ', étant une fonction linéaire de produits symboliques, sera un covariant (n° 7).

D'après la méthode du n° 5, il faudra, pour obtenir Φ_1, développer l'expression de Φ, puis y remplacer $l_1'^p$, $l_1'^{p-1}l_2'$,... par les coefficients de l'expression symbolique A (en ayant soin d'employer, pour les symboles qui figurent dans A, des lettres a, a',...; b,...; ... différentes de a', a'',...; b', b'',...; ...). Nous désignerons par Ω cette opération.

On aura ainsi

$$(25) \qquad \Phi_1 = k_1\Omega(\Pi_1) + k_2\Omega(\Pi_2) + \ldots.$$

Pour montrer que Φ_1 est une fonction linéaire de produits symboliques, il suffira de prouver que $\Omega(\Pi_1)$, $\Omega(\Pi_2)$,... le sont.

13. Or mettons en évidence, dans l'expression de Π_1, les facteurs qui contiennent le symbole l', et désignons par M le produit des autres facteurs; Π_1 prendra une forme telle que la suivante :

$$(26) \qquad \Pi_1 = M(l'a')^\alpha(l'a'')^\beta \ldots l_x'^{p-\alpha-\beta-\ldots}.$$

Cette fonction peut se déduire de la fonction

$$l_x'^p$$

en la soumettant à l'opération

$$(27) \qquad \frac{1}{p(p-1)\ldots(p-\alpha-\beta-\ldots+1)}\left(a_2'\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1'\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\alpha\left(a_2''\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1''\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\beta\ldots$$

et multipliant d'autre part par M. Désignons par O cette double opération, il viendra

$$(28) \qquad \Pi_1 = O(l_x'^p), \quad \Omega(\Pi_1) = \Omega[O(l_x'^p)] = O[\Omega(l_x'^p)],$$

car les opérations O et Ω sont évidemment échangeables.

Mais $\Omega(l_x'^p)$ est le résultat obtenu en substituant, dans $l_x'^p$, au lieu de $l_1'^p$, $l_1'^{p-1}l_2'$,..., les coefficients de A; c'est évidemment la fonction A

elle-même. On aura donc

$$\Omega(\mathrm{H}_1) = \mathrm{O}(\mathrm{A}). \tag{29}$$

16. Cela posé, A est une fonction linéaire de produits symboliques, et, si nous montrons que l'opération

$$\omega = a'_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - a'_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{30}$$

appliquée à une semblable fonction, reproduit une fonction de même nature, notre démonstration sera achevée; car l'opération O se composant d'une série d'opérations successives analogues à ω, suivies de multiplication par un produit symbolique M, la fonction $\mathrm{O}(\mathrm{A}) = \Omega(\mathrm{H}_1)$ sera une fonction linéaire de produits symboliques.

17. Or on a immédiatement, quels que soient les produits symboliques $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ et les constantes $c_1, c_2, \ldots,$

$$\omega(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \ldots) = c_1\omega(\Psi_1) + c_2\omega(\Psi_2) + \ldots. \tag{31}$$

D'ailleurs, Ψ_1 sera de la forme

$$\Psi_1 = \mathrm{P} r_x s_x \ldots = \mathrm{P}(r_1 x_1 + r_2 x_2)(s_1 x_1 + s_2 x_2)\ldots, \tag{32}$$

P étant un produit de déterminants, et $r_x, s_x, \ldots$ des facteurs linéaires (égaux ou inégaux); et l'on aura

$$\left\{\begin{aligned} \omega(\Psi_1) &= a'_2(r_1 \mathrm{P} s_x \ldots + \ldots + s_1 \mathrm{P} r_x \ldots + \ldots) \\ &\quad - a'_1(r_2 \mathrm{P} s_x \ldots + \ldots + s_2 \mathrm{P} r_x \ldots + \ldots) \\ &= (ra')\mathrm{P} s_x \ldots + \ldots + (sa')\mathrm{P} r_x \ldots + \ldots; \end{aligned}\right. \tag{33}$$

donc $\omega(\Psi_1)$ est une somme de produits symboliques. Il en sera de même de $\omega(\Psi_2), \ldots$; donc $\omega(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \ldots)$ est bien une fonction linéaire de produits symboliques, comme nous nous proposions de l'établir.

§ IV. — Composition des covariants.

18. Soient A, B,... des formes algébriques quelconques, F et G deux de leurs covariants, ayant respectivement pour ordres p et q. L'expression symbolique

$$(34)\qquad (fg)^{\mu} f_x^{p-\mu} g_x^{q-\mu}$$

(où f et g sont les symboles des fonctions F et G) représentera, d'après ce qu'on vient de voir, un nouveau covariant. Nous l'appellerons le $\mu^{\text{ième}}$ *composé de* F *avec* G ($\mu^{\text{ième}}$ *Uberschiebung* de M. Gordan), et nous le désignerons par la notation abrégée $[F, G]_{\mu}$.

Si $\mu = 0$, l'expression (34) se réduit au produit des deux fonctions f_x^p, g_x^q, qui sont respectivement les représentations symboliques de F et de G. On aura donc simplement

$$[F, G]_0 = F.G.$$

Soit, au contraire, $\mu > 0$, et proposons-nous de calculer $[F, G]_{\mu}$.

19. Les expressions symboliques de F et de G seront de la forme

$$(35)\qquad \begin{cases} \Phi = k_1\Phi_1 + h_2\Phi_2 + \ldots, \\ \Gamma = c_1\Gamma_1 + c_2\Gamma_2 + \ldots, \end{cases}$$

Φ_1, Φ_2,... et Γ_1, Γ_2,... étant des produits symboliques. On aura d'ailleurs évidemment

$$F = k_1 F_1 + k_2 F_2 + \ldots,$$
$$G = c_1 G_1 + c_2 G_2 + \ldots,$$

en désignant par F_1, F_2,..., G_1, G_2,... les covariants qui ont pour expressions symboliques Φ_1, Φ_2,..., Γ_1, Γ_2,....

Or l'expression (34) ne contenant qu'un seul symbole de chacun des covariants F et G, $[F, G]_{\mu}$ est linéaire par rapport aux coefficients de chacun d'eux. Il en résulte immédiatement l'égalité

$$(36)\qquad [F, G]_\mu = \sum_{i,j} k_i c_j [F_i, G_j]_\mu,$$

laquelle ramène le calcul des covariants composés au cas où les covariants dont ils dérivent ont pour expression symbolique de simples produits symboliques.

20. Admettons donc que F et G soient représentés par des produits symboliques tels que

$$(37)\qquad \begin{cases} \Phi = L r_x s_x t_x \ldots, \\ \Gamma = \Lambda \rho_x \sigma_x \tau_x \ldots, \end{cases}$$

L et Λ étant des produits de déterminants, $r_x s_x t_x \ldots$ et $\rho_x \sigma_x \tau_x \ldots$ des produits de facteurs linéaires (égaux ou inégaux); et proposons-nous de calculer l'expression symbolique de $[F, G]_\mu$ par la méthode du § III.

Nous éliminerons, en premier lieu, le symbole f, en exécutant sur la fonction Φ l'opération

$$\frac{1}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)}\left(g_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - g_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\mu$$

et multipliant ensuite par $g_x^{q-\mu}$. Le résultat sera

$$(38)\qquad \frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} g_x^{q-\mu} L\, \Sigma T,$$

T étant ce que devient le produit $r_x s_x t_x \ldots$ lorsqu'on y remplace μ facteurs arbitrairement choisis, tels que r_x, $s_x, \ldots$, par les déterminants (rg), $(sg), \ldots$, et le signe de sommation Σ s'étendant aux $\dfrac{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}$ diverses manières de choisir les μ facteurs en question.

Il reste à éliminer le symbole g de la nouvelle expression (38) déjà débarrassée du symbole f. Pour cela, considérons en particulier un de ses termes, tel que

$$(39)\qquad \frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} g_x^{q-\mu} L.(rg)(sg)\ldots t_x \ldots.$$

On obtiendra sa nouvelle expression en effectuant sur la fonction

$$(40) \qquad \Gamma = \Lambda \rho_x \sigma_x \tau_x \ldots$$

l'opération

$$(41) \qquad \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)}\left(r_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - r_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\left(s_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - s_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\ldots$$

et multipliant ensuite par $\dfrac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} \mathrm{L} t_x \ldots$

Le résultat de cette opération sera

$$(42) \qquad \frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)} \mathrm{L} t_x \ldots \Lambda \Sigma \mathrm{U},$$

U étant ce que devient le produit $\rho_x \sigma_x \tau_x \ldots$ lorsqu'on y remplace μ facteurs choisis arbitrairement, tels que ρ_x, $\sigma_x, \ldots$, par $(r\rho)$, $(s\sigma), \ldots$, et la sommation Σ s'étendant aux $q(q-1)\ldots(q-\mu+1)$ manières de choisir les facteurs ainsi altérés et de les associer aux symboles r, $s, \ldots$ pour former des facteurs déterminants.

En traitant de la même manière tous les termes de (38) on obtiendra, pour $[\mathrm{F}, \mathrm{G}]_\mu$, l'expression symbolique suivante

$$(43) \qquad \frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)} \Sigma \mathrm{V},$$

V étant le résultat obtenu en remplaçant, dans le produit

$$(44) \qquad \mathrm{L} r_x s_x t_x \ldots \Lambda \rho_x \sigma_x \tau_x \ldots,$$

μ couples de facteurs linéaires, tels que $r_x \rho_x$, $s_x \sigma_x, \ldots$, par les déterminants $(r\rho)$, $(s\sigma), \ldots$, et la sommation s'étendant aux

$$\frac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)}$$

manières de choisir les couples de facteurs ainsi transformés en déterminants.

21. Les divers termes V_1, $\mathrm{V}_2, \ldots$, dont la somme constitue $\Sigma \mathrm{V}$, pourront s'appeler les *termes du composé* $[\mathrm{F}, \mathrm{G}]_\mu$. Ces expressions représentent autant de covariants, et leur moyenne donne l'expression symbolique de $[F, G]_\mu$.

Nous représenterons d'ailleurs cette expression symbolique par la même notation $[F, G]_\mu$ que le covariant auquel elle correspond. Aucune confusion ne sera plus à craindre, car, les principes du calcul symbolique étant maintenant suffisamment établis, nous n'aurons plus, dans la suite de ce Mémoire, à considérer les covariants en eux-mêmes, mais seulement leurs expressions symboliques.

Il devient donc inutile de conserver deux notations distinctes pour ces deux sortes de fonctions.

22. Les termes V_1, V_2,... se déduisent tous de l'un quelconque d'entre eux, tel que

$$V_1 = LA(r\rho)(s\sigma)\ldots t_x\ldots \tau_x \ldots,$$

en permutant ensemble les lettres $r, s, t,\ldots$ d'une part, et $\rho, \sigma, \tau,\ldots$ d'autre part.

Deux termes seront dits *contigus* s'ils ne diffèrent que par l'inversion de deux lettres.

Une substitution quelconque pouvant s'obtenir par une suite d'inversions, on pourra passer de V_1 à un autre terme quelconque V_k par une série de termes intermédiaires $V_2, V_3,\ldots,$ telle que chacun des termes de la suite $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_k$ soit contigu à celui qui le précède.

23. Chacun des termes $V_1, V_2,\ldots$ est un produit symbolique divisible par LA, et contient en outre, parmi ses facteurs, μ déterminants dans lesquels les lettres $r, s, t,\ldots$ sont associées aux lettres $\rho, \sigma, \tau,\ldots.$ Mais *la différence de deux de ces termes s'exprime par une somme de produits symboliques, divisibles par* LA *et dans chacun desquels le nombre de ces déterminants mixtes est* $< \mu$, *chacun de ces produits étant d'ailleurs du même ordre par rapport aux variables que les termes considérés.*

24. En effet, supposons d'abord que les deux termes dont on veut évaluer la différence soient deux termes contigus V_1 et V_2. Soit

$$(45)\qquad V_1 = LA(r\rho)(s\sigma)\ldots t_x\ldots \tau_x\ldots.$$

V_2 pourra différer de V_1 de deux manières différentes : 1° par l'échange de deux lettres, telles que r et s, contenues toutes deux dans les déterminants mixtes $(r\rho)$, $(s\sigma)$,...; 2° par l'échange de deux lettres r et t, dont une seule soit contenue dans ces déterminants.

On aura, dans le premier cas,

$$(46)\qquad V_1 - V_2 = LA\ldots t_x\ldots \tau_x\ldots[(r\rho)(s\sigma) - (r\sigma)(s\rho)].$$

Mais l'identité (24) donne

$$(47)\qquad (r\rho)(s\sigma) + (\rho s)(r\sigma) + (sr)(\rho\sigma) = 0,$$

d'où

$$(48)\qquad (r\rho)(s\sigma) - (s\rho)(r\sigma) = (rs)(\rho\sigma)$$

et, par suite,

$$(49)\qquad V_1 - V_2 = LA\ldots t_x\ldots \tau_x\ldots (rs)(\rho\sigma),$$

expression qui a bien la forme demandée.

On aura, dans le second cas,

$$(50)\qquad V_1 - V_2 = LA(s\sigma)\ldots \tau_x\ldots[(r\rho)t_x - (t\rho)r_x].$$

Mais l'identité (23) donne

$$(51)\qquad (r\rho)t_x + (\rho t)r_x + (tr)\rho_x = 0;$$

d'où

$$(52)\qquad (r\rho)t_x - (t\rho)r_x = (rt)\rho_x$$

et, par suite,

$$(53)\qquad V_1 - V_2 = LA(s\sigma)\ldots \tau_x\rho_x\ldots (rt),$$

expression qui a encore la forme voulue.

25. Soient maintenant V_1 et V_k deux termes quelconques; on aura évidemment

$$(54) \qquad V_1 - V_k = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \ldots + (V_{k-1} - V_k),$$

et la proposition, étant démontrée pour $V_1 - V_2$, $V_2 - V_3$,.... différences de termes contigus, sera vraie pour leur somme $V_1 - V_k$.

26. *La différence entre* $[F, G]_\mu$ *et l'un de ses termes* V_1 *s'exprime par une fonction linéaire de produits symboliques du même ordre que* $[F, G]_\mu$ *par rapport aux variables, divisibles par* LA, *et dans chacun desquels le nombre des déterminants mixtes est* $< \mu$.

En effet, $[F, G]_\mu$ étant la moyenne des termes V_1, V_2,..., on aura

$$(55) \quad \begin{cases} [F, G]_\mu - V_1 = \dfrac{1.2\ldots\mu}{p(p-1)\ldots(p-\mu+1)} \dfrac{1}{q(q-1)\ldots(q-\mu+1)} \\ \qquad\qquad \times [(V_2 - V_1) + (V_3 - V_1) + \ldots], \end{cases}$$

et $V_2 - V_1$, $V_3 - V_1$,... ayant la forme indiquée, il en sera de même de $[F, G]_\mu - V_1$.

27. On peut déduire des développements qui précèdent des conséquences importantes.

Considérons, en effet, un système quelconque de formes algébriques; soient Φ un produit symbolique, représentant un de leurs covariants; a, b, a, b,... les symboles qui figurent dans l'expression de Φ. Partageons, d'une manière arbitraire, les symboles en deux catégories, telles que a, b,... et a, b,.... On aura

$$(56) \qquad \Phi = \mathrm{LM}\mathcal{L}\mathfrak{M}\mathrm{R},$$

L désignant un produit de déterminants binaires, tels que (ab), formés avec les symboles a, b,... de la première catégorie; $\mathcal{L}$ un produit analogue de déterminants, tels que (ab), formés avec les symboles de la seconde catégorie; M un produit de facteurs linéaires a_x, b_x, ..: $\mathfrak{M}$ un produit de facteurs linéaires a_x, b_x,...; enfin, R un produit de déterminants, tels que $(a\mathrm{a})$, où les symboles des deux catégories soient mélangés.

Soit μ le nombre de ces déterminants mixtes dont le produit forme R. Si l'on remplaçait chacun de ces facteurs, tel que $(a\mathrm{a})$, par le produit de deux facteurs linéaires a_x, a_x, R prendrait la forme $S\mathfrak{s}$, où S est un produit de facteurs linéaires de première catégorie, et $\mathfrak{s}$ un produit de facteurs linéaires de seconde catégorie.

Cela posé, les expressions

$$F = LMS, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{s} \tag{57}$$

représentent deux covariants, respectivement formés avec les symboles a, b,... et a, b,...; Φ sera, d'après ce qui précède, l'un des termes de leur $\mu^{ième}$ composé $[F, \mathfrak{F}]_\mu$; et l'on aura le théorème suivant :

Théorème — *Le covariant* Φ *peut être mis sous la forme*

$$\Phi = [F, \mathfrak{F}]_\mu + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} k_{\alpha\beta\gamma} [F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma, \tag{58}$$

où les quantités $k_{\alpha\beta\gamma}$ *représentent des constantes, et où la sommation s'étend :*

1° *Aux divers produits symboliques* F_α *divisibles par* L *qui peuvent être formés avec les symboles* a, b,...;

2° *Aux divers produits symboliques* $\mathfrak{F}_\beta$ *divisibles par* $\mathfrak{L}$ *qui peuvent être formés avec les symboles* a, b,...;

3° *Aux valeurs* $0, 1, \ldots, \mu - 1$ *de* γ. (*La valeur de* γ *à assigner à chaque terme étant d'ailleurs déterminée par la condition que l'ordre de ce terme, par rapport aux variables, soit égal à l'ordre de* Φ.)

28. Ce théorème est évident si $\mu = 0$, auquel cas Φ se réduit à $LM\mathfrak{L}\mathfrak{M} = F\mathfrak{F} = [F, \mathfrak{F}]_0$.

Nous allons montrer qu'il est vrai pour une valeur quelconque de μ, s'il l'est pour les précédentes.

On a, en effet, d'après le n° **26**,

$$[F, \mathfrak{F}]_\mu - \Phi = k_1 \Phi_1 + k_2 \Phi_2 + \ldots, \tag{59}$$

k_1, k_2 ... étant des constantes, et Φ_1, Φ_2,... des produits symboliques, du même ordre que Φ par rapport aux variables, divisibles par $L\mathfrak{L}$, et contenant moins de μ déterminants mixtes.

Le théorème est applicable, par hypothèse, à ces produits Φ_1, Φ_2,... Substituant les valeurs qu'il fournit dans l'équation (59), on en déduira l'expression cherchée de Φ.

29. Soit Φ' un autre terme quelconque du covariant $[F, G]_\mu$. La différence $\Phi' - \Phi$ étant de la forme $k'_1\Phi_1 + k'_2\Phi_2 + \ldots$ (**25**), on trouvera de même une relation de la forme

$$\Phi = \Phi' + \sum_{\alpha\beta\gamma} l_{\alpha\beta\gamma}[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma, \tag{60}$$

les quantités $l_{\alpha\beta\gamma}$ étant des constantes.

30. Le théorème qui précède permet d'exprimer un terme quelconque d'un covariant composé d'ordre μ en fonction de ce covariant lui-même et de composés d'ordre inférieur. On peut réciproquement exprimer un composé d'ordre μ, tel que $[F, \mathfrak{F}]_\mu$, en fonction de l'un quelconque de ses termes Φ, et de termes arbitrairement choisis dans les composés d'ordre inférieur $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma$, ... On a, en effet, ce théorème :

Théorème. — *Soit $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]'_\gamma$ un terme arbitrairement choisi parmi ceux du composé $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma$; on aura une égalité de la forme*

$$[F, \mathfrak{F}]_\mu = \Phi + \sum_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha\beta\gamma}[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]'_\gamma, \tag{61}$$

les quantités $m_{\alpha\beta\gamma}$ étant des constantes.

Si $\mu = 0$, on a $[F, \mathfrak{F}]_0 = \Phi$, et le théorème est évident.

Mais, s'il est vrai pour $0, 1, \ldots, \mu - 1$, il sera vrai pour μ. En effet, il sera vrai pour les fonctions $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma$; en substituant les expressions de ces fonctions dans l'équation (58), on obtiendra, pour $[F, \mathfrak{F}]_\mu$, une expression de la forme voulue.

31. Enfin si, dans l'égalité (60), nous substituons, à chacun des composés $[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma$, son développement en fonction de l'un de ses termes, et de termes arbitraires pris dans les composés d'ordre moindre, nous obtiendrons évidemment une égalité de la forme

$$(62) \qquad \Phi = [F, \mathfrak{f}]'_\lambda + \sum_{\alpha\beta\gamma} n_{\alpha\beta\gamma} [F_\alpha, \mathfrak{f}_\beta]'_\gamma,$$

en écrivant $[F, \mathfrak{f}]'_\lambda$ au lieu de Φ', qui désigne la même chose.

32. Soit Φ un produit symbolique quelconque, dont nous répartirons arbitrairement les symboles en diverses catégories. On aura évidemment

$$\Phi = L_a L_b L_c \ldots \Lambda M,$$

L_a étant un produit de déterminants formés avec les symboles a, a',... de la première catégorie; L_b un produit de déterminants formés avec les symboles b, b',... de la seconde catégorie, etc.; Λ un produit de déterminants formés avec des symboles empruntés à deux catégories différentes; et M un produit de facteurs linéaires.

Nous désignerons respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ le nombre des déterminants qui forment les produits L_a, L_b, L_c,..., Λ.

33. Cela posé, on aura la proposition suivante :

Théorème. — Φ *pourra s'exprimer en fonction linéaire de covariants obtenus par la composition successive de produits symboliques respectivement formés avec les symboles de chaque catégorie, et respectivement divisibles par* L_a, L_b,.... *La somme des ordres des compositions successives à effectuer pour obtenir chacun de ces covariants ne pourra d'ailleurs surpasser* λ.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait trois catégories. On sait (**27**) que Φ peut s'exprimer en fonction linéaire des composés de produits symboliques F_a, formés avec a, a',..., et divisibles par L_a, avec des produits symboliques $\mathfrak{f}$, formés avec b, b',...; c, c',..., et divisibles par $L_b L_c$; mais chacun de ces produits $\mathfrak{f}$ pourra de même s'exprimer en fonction linéaire des composés de produits symboliques F_b, formés avec b, b',..., et divisibles par L_b, avec des produits symboliques F_c, formés avec c, c',..., et divisibles par L_c. Donc Φ se trouvera bien exprimé en fonction linéaire de covariants tels que

$$[F_a, [F_b, F_c]_\mu]_\nu. \tag{63}$$

Reste à prouver que $\mu + \nu \overline{\gtrless} \lambda$. Or, soient α', β', γ' le nombre des déterminants que F_a, F_b, F_c contiennent respectivement en facteurs. On aura évidemment $\alpha' \overline{\gtrless} \alpha$, $\beta' \overline{\gtrless} \beta$, $\gamma' \overline{\gtrless} \gamma$, puisque F_a, F_b, F_c sont divisibles par L_a, L_b, L_c. Cela posé, le covariant (63), lorsqu'on y effectuera les compositions indiquées, se développera en une suite de termes, contenant chacun, en facteurs, $\alpha' + \beta' + \gamma' + \mu + \nu$ déterminants. Mais ces termes sont évidemment du même ordre, par rapport aux variables, que le covariant Φ, qui en est une fonction linéaire. Ils contiennent donc le même nombre de facteurs linéaires et le même nombre de facteurs déterminants. On aura donc

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \mu + \nu = \alpha + \beta + \gamma + \lambda, \quad \text{d'où} \quad \mu + \nu \overline{\gtrless} \lambda.$$

§ V. — Covariants a trois symboles.

34. Nous nous occuperons, dans cette Section, des covariants tels que

$$F = (ab)^\lambda (bc)^\mu (ca)^\nu a_x^{p-\lambda-\nu} b_x^{q-\lambda-\mu} c_x^{r-\mu-\nu}, \tag{64}$$

formés avec les symboles de trois fonctions A, B, C, dont les ordres respectifs, p, q, r, seront supposés être au moins égaux à la somme $\lambda + \mu + \nu = n$.

L'identité

$$(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = 0 \tag{65}$$

nous permettra d'éliminer immédiatement $(ca)^\nu$ de l'expression (64). En effet, $q - \lambda - \mu$ étant au moins égal à ν, F contiendra le facteur $[(ca)b_x]^\nu$, qu'on pourra remplacer par sa valeur

$$[-(ab)c_x - (bc)a_x]^\nu.$$

Développant ensuite cette puissance par la formule du binôme, on obtiendra l'expression de F en fonction linéaire des covariants plus simples représentés par la formule générale

$$(ab)^{\lambda+\nu-\pi}(bc)^{\mu+\pi}a_x^{p-\lambda-\nu+\pi}b_x^{q-\lambda-\mu-\nu}c_x^{r-\mu-\pi}. \quad (\pi = 0, 1, \ldots, \nu).$$

On voit, par là, que si, dans l'expression de F, on fait varier de toutes les manières possibles les exposants λ, μ, ν, de telle sorte que leur somme reste constante et égale à n, tous les covariants ainsi obtenus s'exprimeront linéairement en fonction des $n+1$ covariants que donne l'expression

$$(ab)^{n-\rho}(bc)^{\rho}a_x^{p-n+\rho}b_x^{q-n}c_x^{r-\rho}, \tag{66}$$

lorsque l'on y pose successivement $\rho = 0, 1, 2, \ldots, n$.

D'ailleurs, ces $n+1$ covariants sont évidemment irréductibles entre eux.

35. Pour simplifier l'écriture, nous conviendrons de sous-entendre partout les facteurs linéaires a_x, b_x, c_x; le covariant F prendra alors la forme plus simple

$$F = (ab)^{\lambda}(bc)^{\mu}(ca)^{\nu}; \tag{67}$$

l'identité (65) deviendra

$$(ab) + (bc) + (ca) = 0; \tag{68}$$

enfin le covariant (66) deviendra

$$(ab)^{n-\rho}(bc)^{\rho}, \tag{69}$$

et, pour abréger encore davantage, nous le représenterons par

$$C_{abc}^{\rho}. \tag{70}$$

Nous pourrons donc énoncer la proposition suivante :

Les divers covariants F, fournis par l'expression $(ab)^{\lambda}(bc)^{\mu}(ca)^{\nu}$, où $\lambda+\mu+\nu = n$, s'expriment linéairement en fonction des $n+1$ covariants C_{abc}^{ρ}, où $\rho = 0, 1, 2, \ldots, n$.

56. On voit, d'une manière analogue, que les covariants F pourront s'exprimer linéairement en fonction des $n+1$ covariants

$$(71)\qquad C^{\rho}_{bca} = (bc)^{n-\rho}(ca)^{\rho}, \quad \text{où} \quad \rho = 0, 1, \ldots, n,$$

ou encore en fonction des $n+1$ covariants

$$(72)\qquad C^{\rho}_{cab} = (ca)^{n-\rho}(ab)^{\rho}, \quad \text{où} \quad \rho = 0, 1, \ldots, n.$$

57. Cela posé, nous allons établir le théorème suivant :

Théorème. — *Les divers covariants* F *pourront s'exprimer linéairement en fonction des covariants* C^{ρ}_{abc}, C^{ρ}_{bca}, C^{ρ}_{cab}, *où* ρ *est un entier qui ne dépasse pas* $\frac{n}{3}$.

Si n *est de la forme* $3k+2$, *ces derniers covariants seront indépendants les uns des autres.*

Si n *est de la forme* $3k+1$, *ils seront liés par une relation qui permettra d'exprimer la somme* $C^{k}_{abc} + C^{k}_{bca} + C^{k}_{cab}$ *en fonction linéaire de ceux des covariants* C, *où* $\rho < k$.

Si n *est de la forme* $3k$, *il existera deux relations, qui permettront d'exprimer deux des covariants* C^{k}_{abc}, C^{k}_{bca}, C^{k}_{cab} *en fonction du troisième, et de ceux des covariants* C, *où* $\rho < k$.

58. Pour démontrer ce théorème, nous allons établir, au moyen de l'identité (68), un système d'équations linéaires entre les $3k+3$ covariants C^{ρ}_{abc}, C^{ρ}_{bca}, C^{ρ}_{cab}.

Soit d'abord ρ un entier quelconque non supérieur à $\frac{n}{3}$. On aura identiquement

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^{n-\rho}C^{\rho}_{cab} &= (-1)^{n-\rho}(ca)^{n-\rho}(ab)^{\rho} = [(ab)-(bc)]^{n-\rho}(ab)^{\rho} \\ &= (ab)^{n} + \frac{n-\rho}{1}(ab)^{n-1}(bc) + \ldots + (ab)^{\rho}(bc)^{n-\rho} \\ &= C^{0}_{abc} + \frac{n-\rho}{1}C^{1}_{abc} + \ldots + \frac{(n-\rho)\ldots(n-\rho-i+1)}{1.2\ldots i}C^{i}_{abc} + \ldots \end{aligned}\right.$$

En faisant varier ρ, on obtiendra $k+1$ équations, k étant le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{3}$. Elles permettront d'exprimer linéairement $k+1$ quelconques des covariants $C^0_{abc}, \ldots, C^n_{abc}$, tels que C^i_{abc}, $C^{i'}_{abc}$, $C^{i''}_{abc}, \ldots$, en fonction linéaire des autres et des quantités C^ρ_{cab} (où $\rho = 0, 1, 2, \ldots, k$), pourvu toutefois que le déterminant des coefficients qui multiplient ces $k+1$ covariants dans les équations (73) ne soit pas nul. Or il est aisé de voir qu'il ne l'est pas.

39. En effet, la $\rho + 1^{ième}$ ligne de ce déterminant Δ est formée des termes

$$\frac{(n-\rho)\ldots(n-\rho-i+1)}{1.2\ldots i}, \quad \frac{(n-\rho)\ldots(n-\rho-i'+1)}{1.2\ldots i'}, \quad \frac{(n-\rho)\ldots(n-\rho-i''+1)}{1.2\ldots i''}, \quad \ldots,$$

lesquels contiennent le facteur commun $(n-\rho)\ldots(n-\rho-i+1)$, si nous supposons $i, i', i'', \ldots$ rangés par ordre de grandeurs croissantes. D'autre part, les diverses colonnes du déterminant Δ contiennent respectivement les facteurs communs $\frac{1}{1.2\ldots i}$, $\frac{1}{1.2\ldots i'}, \ldots$. On aura donc

$$\Delta = \frac{\prod_{\rho=0}^{\rho=k}(n-\rho)\ldots(n-\rho-i+1)}{1.2\ldots i.1.2\ldots i'.1.2\ldots i''\ldots}\Delta', \tag{74}$$

Δ' étant un nouveau déterminant, dont la $\rho + 1^{ième}$ ligne sera

$$1, \quad (n-\rho-i)\ldots(n-\rho-i'+1), \quad (n-\rho-i)\ldots(n-\rho-i''+1), \quad \ldots.$$

Cela posé, on ne changera pas Δ', en y retranchant chaque ligne de la précédente; ce changement laissera la dernière ligne seule invariable, et changera en général la $\rho + 1^{ième}$ en

$$0, \quad (i'-i)(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i'+1), \quad (i''-i)(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i''+1), \quad \ldots.$$

Le déterminant Δ' ainsi transformé, ayant tous ses termes de la première colonne égaux à zéro, sauf le dernier, qui est égal à 1, pourra se simplifier par la suppression de la dernière ligne et de la dernière colonne. On obtiendra ainsi le déterminant

$$\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ (i'-i)(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i'+1) & (i''-i)(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i''+1) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

où les diverses lignes s'obtiendront en posant $\rho = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Mettant en évidence les facteurs, tels que

$$(n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i'+1),$$

communs aux divers termes de chaque ligne, et les facteurs $i'-i$, $i''-i, \ldots$, communs aux termes de chaque colonne, il viendra

$$(75)\quad \Delta' = (i'-i)(i''-i)\ldots \prod_{\rho=0}^{\rho=k-1} (n-\rho-i-1)\ldots(n-\rho-i'+1)\ \Delta'',$$

Δ'' étant un nouveau déterminant, de la forme

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} \cdot & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 1 & (n-\rho-i')\ldots(n-\rho-i''+1) & (n-\rho-i')\ldots(n-\rho-i'''+1) & \cdots \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

et dont les diverses lignes s'obtiendront en posant successivement $\rho = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Ce déterminant Δ'', ayant une forme analogue à celle de Δ', pourra être traité de même, et l'on trouvera

$$(76)\quad \Delta'' = (i''-i')(i'''-i')\ldots \prod_{\rho=0}^{\rho=k-2} (n-\rho-i'-1)\ldots(n-\rho-i''+1).\Delta''',$$

Δ''' étant un déterminant analogue aux précédents, mais contenant une ligne de moins. Continuant ainsi, on finira par obtenir l'expression de Δ comme produit de facteurs qui seront tous différents de zéro, car les $k+1$ entiers $i, i', i'', \ldots$ étant différents, et au plus égaux à n, ne pourront respectivement surpasser $n-k$, $n-k+1$, $n-k+2$, etc.

40. Cela posé, n est égal à $3k$, à $3k+1$ ou à $3k+2$. Soit d'abord $n = 3k+2$.

D'après ce qui précède, on pourra exprimer les $k+1$ covariants

$$C_{abc}^{k+1}, \ldots, C_{abc}^{n-k-1}$$

en fonction linéaire des autres covariants

$$C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}, C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k}, C_{abc}^{n-k}, \ldots, C_{abc}^{n},$$

qui figurent dans les équations (73).

Mais, d'autre part, $C_{abc}^{n-k}, \ldots, C_{abc}^{n}$ peuvent s'exprimer en fonction linéaire de $C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}$. On a, en effet, d'une manière générale,

$$(77)\quad \begin{cases} C_{abc}^{n-k+\rho} = (ab)^{k-\rho}(bc)^{n-k+\rho} = (-1)^{k-\rho}[(bc)+(ca)]^{k-\rho}(bc)^{n-k+\rho} \\ \qquad = (-1)^{k-\rho}[C_{bca}^{k-\rho} + (k-\rho)C_{bca}^{k-\rho-1} + \ldots + C_{bca}^{0}]. \end{cases}$$

Donc les covariants $C_{abc}^{k+1}, \ldots, C_{abc}^{n}$ s'exprimeront linéairement en fonction de $C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}, C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k}, C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}$; et les covariants F, pouvant s'exprimer linéairement en $C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{n}$, pourront s'exprimer linéairement en fonction de

$$(78)\qquad C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k}, C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}, C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}.$$

Ces derniers covariants sont d'ailleurs distincts, puisqu'on a vu que le nombre des covariants indépendants est égal à $n+1=3k+3$.

Le théorème est donc démontré.

41. Soit, en second lieu, $n=3k+1$.

On pourra exprimer $C_{abc}^{k}, \ldots, C_{abc}^{n-k-1}$ en fonction de $C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}$, $C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k-1}, C_{abc}^{n-k}, \ldots, C_{abc}^{n}$, et, par suite, en fonction de $C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}$, $C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k-1}, C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}$; et les covariants F, étant des fonctions linéaires de $C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{n}$, pourront s'exprimer en fonction de

$$(79)\qquad C_{abc}^{0}, \ldots, C_{abc}^{k-1}, C_{cab}^{0}, \ldots, C_{cab}^{k}, C_{bca}^{0}, \ldots, C_{bca}^{k}.$$

Ces derniers covariants, en nombre $3k+2=n+1$, seront évidemment distincts.

Soit, d'ailleurs,

$$(80)\qquad C_{abc}^{k} = \alpha C_{cab}^{k} + \beta C_{bca}^{k} + \ldots$$

l'expression de C_{abc}^{k} en fonction des $n+1$ covariants (79). On obtiendrait de nouvelles relations entre les $n+2$ covariants qui figurent dans cette expression en permutant circulairement les lettres a, b, c. Mais il ne peut exister entre eux qu'une seule relation, puisque $n+1$ d'entre eux sont distincts. Donc les nouvelles équations obtenues doivent se confondre avec l'équation (80); ce qui donnera, entre autres conditions, les suivantes : $\alpha=\beta=-1$. La relation (80) exprimera donc la somme $C^k_{abc} + C^k_{cab} + C^k_{bca}$ en fonction des autres covariants, ce qui complète la démonstration du théorème.

42. Soit enfin $n = 3k$.

On pourra exprimer $C^k_{abc}, \ldots, C^{n-k}_{abc}$ en fonction de $C^0_{cab}, \ldots, C^k_{cab}$ et de $C^{n-k+1}_{abc}, \ldots, C^n_{abc}$. Ces derniers covariants s'expriment eux-mêmes en fonction de $C^0_{bca}, \ldots, C^{k-1}_{bca}$. Par suite, les covariants F pourront s'exprimer en fonction des $n+1$ covariants

$$C^0_{abc}, \ldots, C^{k-1}_{abc}, C^0_{cab}, \ldots, C^k_{cab}, C^0_{bca}, \ldots, C^{k-1}_{bca}, \tag{81}$$

ce qui démontre le théorème.

Soient, d'ailleurs,

$$C^k_{abc} = \alpha C^k_{cab} + \ldots,$$
$$C^k_{bca} = \beta C^k_{cab} + \ldots$$

les expressions de C^k_{abc}, C^k_{bca} en fonction des covariants (81). En permutant circulairement a, b, c, on obtiendra de nouvelles équations

$$C^k_{bca} = \alpha C^k_{abc} + \ldots,$$
$$C^k_{cab} = \beta C^k_{abc} + \ldots.$$

Mais ces relations ne peuvent être distinctes des précédentes. Elles seront donc identiquement satisfaites si l'on y substitue les valeurs de C^k_{abc}, C^k_{bca}, tirées de ces dernières; on obtiendra ainsi, entre autres conditions, les suivantes :

$$\beta = \alpha^2, \quad \beta\alpha = 1, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta = 1,$$

les quantités α, β étant réelles de leur nature.

§ VI. — Décomposition des covariants en trois parties.

43. Théorème. — *Soit* A, B, C, D,... *un système de fonctions entières en nombre quelconque, mais dont les ordres respectifs p, q, r, s,... soient tous au moins égaux à $2l$.*

Un covariant quelconque Φ de ce système pourra se réduire à la forme

$$\Phi = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} + \mathfrak{R}. \tag{82}$$

$\mathfrak{P}$ *désignant une fonction linéaire de produits symboliques dont chacun contient en facteur un déterminant élevé à une puissance supérieure à l;*

$\mathfrak{Q}$ *une fonction linéaire de produits symboliques dont chacun contient en facteur un produit de déterminants de la forme $(ab)^l(bc)^l(ca)^\rho$, ρ étant > 0, et les symboles a, b, c correspondant à des fonctions* A, B, C *d'ordre précisément égal à $2l$;*

Enfin $\mathfrak{R}$ une fonction entière de produits symboliques, dont chacun aura la forme suivante :

$$(83)\qquad R = (ab)^\mu(bc)^\nu(cd)^{\mu'}(de)^{\nu'}\ldots a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu} c_x^{r-\nu-\mu'} d_x^{s-\mu'-\nu'}\ldots,$$

les symboles a, b, c,... pouvant correspondre à des fonctions quelconques du système, et les exposants μ, ν, μ', ν',... étant différents de zéro et satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$(84)\qquad \begin{cases} \nu \overset{=}{<} \dfrac{\mu}{2}, & \nu' \overset{=}{<} \dfrac{\mu'}{2}, & \nu'' \overset{=}{<} \dfrac{\mu''}{2}, \ldots, \\ \mu \overset{=}{<} l, & \mu' \overset{=}{<} \mu - \nu - \varepsilon, & \mu'' \overset{=}{<} \mu' - \nu' - \varepsilon', \ldots, \end{cases}$$

où $\varepsilon^{(i)}$ est égal à 0 ou à 1, suivant que $\mu^{(i)}$ est pair ou impair.

44. Le nombre des termes de la suite μ, ν, μ', ν',... peut être pair ou impair; il peut même être nul, auquel cas R se réduirait à a_x^p.

La réduction demandée est donc toute faite pour les covariants du premier degré, tels que a_x^p, b_x^q,.... Elle l'est également pour les covariants du second degré, tels que $(ab)^\rho a_x^{p-\rho} b_x^{q-\rho}$; car ils seront de la forme $\mathfrak{P}$, si $\rho > l$, de la forme $\mathfrak{R}$, si $\rho \overset{=}{<} l$.

En général, un covariant quelconque étant une fonction linéaire de produits symboliques, il suffira de donner le moyen de réduire un produit symbolique.

45. Considérons d'abord un produit à trois symboles, tel que

$$(85)\qquad \Phi = (ab)^\mu(bc)^\nu(ca)^\pi a_x^t b_x^u c_x^v,$$

où nous posons, pour abréger, $t = p - \mu - \pi$, $u = q - \mu - \nu$, $v = r - \nu - \pi$.

Si la somme $\mu + \nu + \pi$ ne surpasse pas $2l$, elle ne pourra, *a fortiori*, dépasser p, q, r; et la réduction demandée résultera immédiatement du théorème du n° **37**.

Soit, au contraire, $\mu + \nu + \pi > 2l$; et supposons, pour fixer les idées, $q \overline{\gtrless} p \overline{\gtrless} r$. Désignons par ρ le plus petit des deux nombres π et u. Φ contiendra en facteur $(ca)^\rho b_x^\rho$, qu'on pourra remplacer par $[-(ab)c_x - (bc)a_x]^\rho$. Substituant et développant, Φ se trouvera exprimé linéairement par des covariants de la forme

$$(86) \qquad \Phi' = (ab)^{\mu+\sigma}(bc)^{\nu+\rho-\sigma}(ca)^{\pi-\rho}a_x^{t+\rho-\sigma}b_x^{u-\rho}c_x^{\nu+\sigma}.$$

Mais ces termes sont tous réduits. En effet, si $\rho = \pi$, les deux exposants $\mu + \sigma$ et $\nu + \rho - \sigma$ auront pour somme $\mu + \nu + \pi > 2l$. Donc l'un au moins d'entre eux sera $> l$, et Φ' sera de la forme $\mathfrak{P}$.

Soit, au contraire, $\rho < \pi$, d'où $\rho = u$. La somme de ces deux exposants sera $\mu + \nu + u = q \overline{\gtrless} 2l$. Si l'un d'eux est $> l$, Φ' sera de la forme $\mathfrak{P}$. Dans le cas contraire, tous deux seront égaux à l; et l'on aura nécessairement $q = 2l$, et par suite $p = r = 2l$. Comme on a d'ailleurs $\pi - \rho > 0$, Φ' sera de la forme $\mathfrak{Q}$.

46. Nous allons maintenant montrer que le théorème est vrai pour un produit quelconque Φ contenant k symboles, s'il est vrai pour les covariants à $k-2$ symboles. Pour cela, nous admettrons que $(ab)^\mu$ soit le déterminant qui figure à la plus haute puissance dans Φ. Si $\mu > l$, Φ sera tout réduit, et de l'espèce $\mathfrak{P}$. Dans le cas contraire, nous verrons que Φ peut s'exprimer à l'aide de termes réduits $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ et de produits symboliques Ψ contenant un déterminant à une puissance supérieure à μ. Il est clair que cela suffira pour établir le théorème.

Pour plus de simplicité, nous traiterons d'abord deux cas particuliers.

47. *Premier cas particulier.* — Supposons que Φ contienne en facteur $(ab)^\mu(bc)^\nu(ca)^\pi$, $\nu + \pi$ étant $> \frac{\mu}{2}$. On sait (**27**) que Φ pourra s'exprimer au moyen des composés de covariants I formés avec les symboles d, e,..., autres que a, b, c, avec des covariants K formés avec a, b, c et divisibles par $(ab)^\mu(bc)^\nu(ca)^\pi$.

Soit

$$(87)\qquad K = (ab)^{\mu_1}(bc)^{\nu_1}(ca)^{\pi_1} a_x^{p-\mu_1-\pi_1} b_x^{q-\mu_1-\nu_1} c_x^{r-\nu_1-\pi_1}$$

un de ces derniers covariants. On aura

$$(88)\qquad \mu_1 \geqq \mu, \quad \nu_1 \geqq \nu, \quad \pi_1 \geqq \pi.$$

On pourra d'ailleurs (45) réduire K à des termes des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$. Les termes de cette dernière espèce seront d'ailleurs de l'espèce Ψ. En effet, soit, par exemple,

$$(89)\qquad T = (ab)^{\mu_2}(bc)^{\nu_2} a_x^{p-\mu_2} b_x^{q-\mu_2-\nu_2} c_x^{r-\nu_2}$$

un de ces termes. On aura, par définition,

$$(90)\qquad \mu_2 \geqq 2\nu_2 \geqq \tfrac{2}{3}(\mu_2+\nu_2).$$

Mais T étant évidemment du même ordre que K par rapport aux variables, on aura

$$(91)\qquad \mu_2+\nu_2 = \mu_1+\nu_1+\pi_1 \geqq \mu+\nu+\pi > \tfrac{3}{2}\mu$$

et, par suite,

$$(92)\qquad \mu_2 > \mu,$$

ce qui montre que T est bien de l'espèce Ψ.

Donc K s'exprime par une somme de termes des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ. En les composant avec les covariants I, on obtiendra évidemment des termes de même espèce, les déterminants qui divisent un covariant se retrouvant dans chaque terme de ses composés.

Donc Φ se trouvera exprimé par des termes des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ, ce qu'il fallait démontrer.

48. *Deuxième cas particulier.* — Supposons que Φ contienne en facteur le produit

$$\Pi = (ab)^\mu(bc)^\nu(ac)^\pi(ad)^\rho(bd)^\sigma(cd)^\tau,$$

la somme $\nu + \pi + \rho + \sigma + \tau$ étant supérieure à $\mu - \varepsilon$ (ε désignant zéro ou l'unité, suivant que μ est pair ou impair). Φ pourra (**27**) s'exprimer au moyen des composés de covariants I formés avec les symboles $e, \ldots$ avec des covariants K formés avec a, b, c, d et divisibles par Π.

Soit

$$(93) \qquad \mathrm{K} = (ab)^{\mu_1}(bc)^{\nu_1}(ac)^{\pi_1}(ad)^{\rho_1}(bd)^{\sigma_1}(cd)^{\tau_1} a_x^{p-\mu_1-\pi_1-\rho_1} \ldots$$

un de ces covariants. On aura

$$(94) \qquad \mu_1 \overline{\overline{>}} \mu, \quad \nu_1 \overline{\overline{>}} \nu, \ldots, \quad \tau_1 \overline{\overline{>}} \tau.$$

On pourra d'ailleurs (**31**) exprimer K linéairement au moyen de termes arbitrairement choisis dans les composés de la forme

$$(95) \qquad [(ab)^{\mu_2} a_x^{p-\mu_2} b_x^{q-\mu_2}, (cd)^{\tau_2} c_x^{r-\tau_2} d_x^{s-\tau_2}]_{\nu_2},$$

où $\mu_2 \overline{\overline{>}} \mu_1$, $\tau_2 \overline{\overline{>}} \tau_1$ et $\nu_2 = \mu_1 + \nu_1 + \pi_1 + \rho_1 + \sigma_1 + \tau_1 - \mu_2 - \tau_2$ (cette dernière condition étant nécessaire pour que l'ordre du terme considéré par rapport aux variables soit le même que celui de K).

Parmi ces termes, nous conviendrons de choisir celui T où le déterminant (bc) figure avec le plus fort exposant possible. Cet exposant λ sera évidemment égal au plus petit des trois nombres ν_2, $q - \mu_2$, $r - \tau_2$.

Si μ_2 ou τ_2 est $> \mu$, le terme T, contenant en facteur $(ab)^{\mu_2}$ ou $(cd)^{\tau_2}$, sera tout réduit, et de l'espèce Ψ.

Soit, au contraire, μ_2 et τ_2 au plus égaux à μ; on aura précisément $\mu_2 = \mu$; car $\mu_2 \overline{\overline{>}} \mu_1 \overline{\overline{>}} \mu$. D'ailleurs, μ étant $\overline{\overline{<}} l$, et q et r au moins égaux à $2l$, $q - \mu_2$ et $r - \tau_2$ seront au moins égaux à l, et *a fortiori* à μ. Dans ces conditions, si $\nu_2 > \frac{\mu}{2}$, λ sera $> \frac{\mu}{2}$; et T, contenant en facteur $(ab)^{\mu}(bc)^{\lambda}$, sera réductible (**47**).

Supposons enfin ν_2 au plus égal à $\frac{1}{2}\mu$, et *a fortiori* inférieur à $q - \mu_2$ et à $r - \tau_2$; on aura $\lambda = \nu_2$ et, par suite,

$$(96) \qquad \mathrm{T} = (ab)^{\mu}(bc)^{\nu_2}(cd)^{\tau_2} a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu_2} c_x^{r-\nu_2-\tau_2} d_x^{s-\tau_2}.$$

D'ailleurs, on a $\tau_2 \leqq \mu$, $\mu \leqq l$, $p \geqq 2l$, d'où $\tau_2 \leqq p - \mu$. Donc T est divisible par $[(cd)a_x]^{\tau_2}$. Remplaçant ce facteur par la quantité équivalente $[(ca)d_x + (ad)c_x]^{\tau_2}$ et développant, on aura T linéairement exprimé par des covariants de la forme

$$(97) \qquad U = (ab)^{\mu}(bc)^{\nu_2}(ca)^{\rho}(ad)^{\tau_2-\rho}a_x^{p-\mu-\tau_2}\ldots.$$

Cela posé, si $\nu_2 + \rho > \frac{\mu}{2}$, U sera réductible à des termes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ (**47**); il en sera de même si $\tau_2 - \rho > \frac{\mu}{2}$, U contenant en facteur $(ab)^{\mu}(ad)^{\tau_2-\rho}$. Or l'une de ces deux hypothèses se présentera nécessairement, quel que soit ρ; car on a

$$(98) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu_2 + \rho + \tau_2 - \rho = \nu_2 + \tau_2 &= \mu_1 + \nu_1 + \pi_1 + \rho_1 + \sigma_1 + \tau_1 - \mu_2 \\ &\geqq \mu + \nu + \pi + \rho + \sigma + \tau - \mu > \mu - \varepsilon. \end{aligned} \right.$$

Donc l'un au moins des deux entiers $\nu_2 + \rho$, $\tau_2 - \rho$ est supérieur à $\frac{\mu - \varepsilon}{2}$, plus grand entier contenu dans $\frac{\mu}{2}$, et, par suite, supérieur à $\frac{\mu}{2}$.

Donc K se trouvera exprimé ici encore par des termes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ. En les composant avec les covariants I, on obtiendra des termes de même espèce, par lesquels Φ se trouvera exprimé.

49. Passons maintenant au cas général où Φ peut être un produit symbolique quelconque contenant k symboles $a, b, c, d, e, f, \ldots$ et divisible par $(ab)^{\mu}$. On sait (**27**) qu'il pourra s'exprimer linéairement au moyen de termes arbitrairement choisis dans les composés de covariants I formés avec les symboles $c, d, e, f, \ldots$ avec des covariants K, de la forme

$$(99) \qquad K = (ab)^{\mu_1}a_x^{p-\mu_1}b_x^{q-\mu_1}, \quad \text{où} \quad \mu_1 \geqq \mu.$$

Les covariants I, ne contenant que $k - 2$ symboles, seront réductibles, par hypothèse, à des termes des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$. Les termes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, composés avec K, donnant encore des termes de même espèce, il suffira d'étudier les termes résultant de la composition des covariants K avec des covariants I de la forme $\mathfrak{R}$. Par définition, ceux-ci s'exprimeront linéairement par des produits de la forme $R_1 R_2 \ldots$, où

R_1, R_2,... sont des produits symboliques, tels que

$$R_1 = (cd)^{\mu'}(de)^{\nu'}(ef)^{\mu''}\ldots c_x^{r-\mu'} d_x^{s-\mu'-\nu'}\ldots, \tag{100}$$

μ', ν', μ'',... satisfaisant aux relations

$$\nu' \overline{\gtrless} \frac{\mu'}{2}, \quad \mu'' \overline{\gtrless} \mu' - \nu' - \varepsilon', \quad \ldots. \tag{101}$$

Parmi les termes contenus dans le $\nu^{ième}$ composé de K avec $R_1 R_2 \ldots$, nous sommes en droit d'en choisir un arbitrairement. Nous prendrons celui T où (bc) se présente avec l'exposant le plus élevé. Cet exposant λ sera le plus petit des nombres ν, $q - \mu_1$, $r - \mu'$.

Si $\mu_1 > \mu$ ou $\mu' > \mu$, T étant divisible par $(ab)^{\mu_1}(cd)^{\mu'}$ sera immédiatement de la forme Ψ.

Dans le cas contraire, on aura $\mu_1 = \mu$, $\mu' \overline{\gtrless} \mu$. Donc μ étant $\overline{\gtrless} l$ et q et r au moins égaux à $2l$, on aura

$$q - \mu_1 = q - \mu \overline{\gtrless} l \overline{\gtrless} \mu, \quad r - \mu' \overline{\gtrless} r - \mu \overline{\gtrless} l \overline{\gtrless} \mu. \tag{102}$$

Cela posé, si $\nu > \frac{\mu}{2}$, λ sera $> \frac{\mu}{2}$, et T étant divisible par $(ab)^{\mu}(bc)^{\lambda}$ sera réductible à des termes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ (**47**).

Dans le cas contraire, on aura $\lambda = \nu$, et T sera de la forme

$$(ab)^{\mu}(bc)^{\nu}(cd)^{\mu'}(de)^{\nu'}(ef)^{\mu''}\ldots a_x^{l-\nu} b_x^{q-\mu-\nu} c_x^{r-\nu-\mu'}\ldots R_2 \ldots \tag{103}$$

Si $\nu + \mu' > \mu - \varepsilon$, T sera réductible à des termes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, Ψ (**48**). Dans le cas contraire, T sera de l'espèce $\mathfrak{R}$, toutes les conditions qui caractérisent cette espèce se trouvant remplies par nos hypothèses.

Le théorème est donc démontré.

§ VII — Limite du degré des covariants R.

50. On a vu, dans la Section précédente, qu'un covariant quelconque Φ peut s'exprimer par des termes des espèces $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, et par une fonction entière de covariants R de l'espèce suivante :

$$R = (ab)^{\mu}(bc)^{\nu}(cd)^{\mu'}(de)^{\nu'}\dots a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu}\dots,$$

où $\mu, \nu, \mu', \nu', \dots$ satisfont aux relations (84).

L'ordre de ces covariants R *est au moins égal à* $2l$. En effet, soit δ le degré de l'un d'eux. Il aura pour ordre

$$(104)\qquad \begin{cases} \omega = p + q + \dots - 2(\mu + \nu + \mu' + \nu' + \dots) \\ \quad \overline{\gtrless}\, \delta . 2l - 2(\mu + \nu + \mu' + \nu' + \dots), \end{cases}$$

$p, q, \dots$ étant au moins égaux à $2l$.

Mais, si la suite $\mu, \nu, \mu', \nu', \dots$ se termine à un terme de l'espèce μ. tel que $\mu^{(i)}$, on aura

$$\delta = 2i + 2;$$

en outre, en vertu des relations (84),

$$(105)\qquad \mu \overline{\lessgtr} l,\quad \nu + \mu' \overline{\lessgtr} \mu \overline{\lessgtr} l,\quad \dots,\quad \nu^{(i-1)} + \mu^{(i)} \overline{\lessgtr} \mu^{(i-1)} \overline{\lessgtr} l,$$

d'où

$$(106)\qquad \mu + \nu + \mu' + \dots + \mu^{(i)} \overline{\lessgtr} (i+1)l$$

et, par suite,

$$(107)\qquad \omega \overline{\gtrless} (i+1)2l.$$

Si la suite $\mu, \nu, \mu', \nu', \dots$ avait un terme de plus $\nu^{(i)}$, on aurait

$$\delta = 2i + 3,\quad \nu^{(i)} \overline{\lessgtr} \tfrac{1}{2}\mu^{(i)} \overline{\lessgtr} \tfrac{1}{2} l,$$

d'où

$$(108)\qquad \mu + \nu + \mu' + \dots + \nu^{(i)} \overline{\lessgtr} (i + \tfrac{3}{2})l,\quad \omega \overline{\gtrless} (i + \tfrac{3}{2})\, 2l.$$

51. D'autre part, *le degré des covariants* R *ne pourra surpasser* $2l+1$. En effet, les entiers $\mu, \mu', \dots, \mu^{(i)}$ formant une série décroissante, leur nombre $i+1$ ne pourra surpasser μ. Donc δ, qui est égal à $2i+2$ ou à $2i+3$, ne pourra surpasser $2\mu+1$, ni *a fortiori* $2l+1$

Une étude plus approfondie de la question va nous permettre de resserrer considérablement cette limite.

52. Nous dirons que deux covariants sont *équivalents*, si leur différence peut s'exprimer par des termes des espèces $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$. L'équivalence sera représentée, suivant l'usage, par le signe $\equiv$.

Nous dirons qu'un covariant est *réductible*, s'il est équivalent à une fonction entière de covariants de degré moindre.

53. *Un covariant quelconque* Φ *est équivalent à une fonction entière de covariants irréductibles de l'espèce* R.

On a en effet, d'après ce qu'on a vu (**45**),

$$\Phi \equiv f(R_1, R_2, R_3, ..), \tag{109}$$

f désignant une fonction entière, et R_1, R_2,... des covariants de l'espèce R.

Supposons que, parmi ces covariants R_1, R_2,..., il y en ait de réductibles, et admettons, pour fixer les idées, que R_1 et R_2 soient ceux de ces covariants réductibles dont le degré ρ est maximum.

Il est clair qu'on ne troublera pas l'équivalence (109) en y substituant, pour R_1, R_2, les fonctions entières de covariants de degré $< \rho$, C_1, C_2,..., qui leur sont équivalentes. D'ailleurs, chacun des covariants C_1, C_2,... est à son tour équivalent (**45**) à une fonction entière de covariants r_1, r_2,... de l'espèce R et dont le degré ne surpasse pas le sien. Substituant ces fonctions, dans l'équivalence, à la place de C_1, C_2,..., on obtiendra une relation de la forme

$$\Phi \equiv f_1(r_1, r_2, \ldots, R_3, \ldots), \tag{110}$$

expression dont le second membre ne contient plus aucun covariant réductible de degré supérieur à $\rho - 1$.

En renouvelant cette opération, de manière à chasser toujours de l'expression de Φ les covariants réductibles du degré le plus élevé, on finira par les faire disparaître complétement.

54. Cela posé, au lieu de chercher directement en fonction de l

une limite supérieure au degré δ des covariants irréductibles de l'espèce R, nous renverserons le problème, et, ce degré étant supposé donné, nous déterminerons une limite inférieure $f(\delta)$ pour l'exposant μ, ainsi qu'une limite inférieure $\varphi(\delta)$ de la somme

$$S = \mu + \nu + \mu' + \nu' + \ldots$$

Ces limites une fois trouvées, on aura

$$(111) \qquad l \geqq \mu \geqq f(\delta), \quad \text{d'où} \quad \delta \leqq \psi(l),$$

ψ désignant la fonction inverse de la fonction numérique f.

55. Soit d'abord $\delta = 1$. La suite $\mu, \nu, \mu', \ldots$ ne contenant aucun terme, on aura

$$\mu = 0, \quad S = 0,$$

d'où

$$f(1) = 0, \quad \varphi(1) = 0.$$

Soit $\delta = 2$. La suite contiendra un seul terme μ, au moins égal à 1 : d'où

$$f(2) = 1, \quad \varphi(2) = 1.$$

Soit $\delta = 3$. La suite aura deux termes, μ, ν, et l'on aura

$$\nu \geqq 1, \quad \mu \geqq 2\nu \geqq 2,$$

d'où

$$f(3) = 2, \quad \varphi(3) = 3.$$

Nous allons maintenant établir des formules pour déterminer généralement $f(\delta)$ et $\varphi(\delta)$ en fonction de $f(\delta - 1), f(\delta - 2), \ldots, \varphi(\delta - 1), \varphi(\delta - 2), \ldots$.

56. Théorème. — *Un produit symbolique quelconque Φ sera réductible, si l'on peut y répartir les symboles en k catégories $a, a', \ldots$; $b, b', \ldots$; $c, c', \ldots$; $\ldots$, telles que le nombre λ des déterminants qui figurent dans Φ et où sont associés des symboles de catégorie différente soit inférieur à $\varphi(k)$.*

Ce théorème est évident si $\lambda = 0$, Φ étant un produit de covariants respectivement formés avec $a, a', \ldots$; avec $b, b', \ldots$. Or nous allons montrer qu'il est vrai pour λ, s'il l'est pour $\lambda - 1, \lambda - 2, \ldots$.

57. On a vu (**55**) que Φ peut s'exprimer linéairement par les composés de produits symboliques $F_a, F_b, F_c, \ldots$, respectivement formés avec $a, a', \ldots$, avec $b, b', \ldots$, avec $c, c', \ldots$; la somme U des ordres des compositions successives à effectuer étant au plus égale à λ, et *a fortiori* inférieure à $\varphi(k)$.

Chacun des covariants $F_a, F_b, \ldots$ peut s'exprimer par une somme de produits symboliques des espèces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$; et leur composé sera la somme des résultats obtenus en composant séparément ces divers termes (**19**).

Or un produit symbolique Π, de l'espèce $\mathfrak{P}$ ou de l'espèce $\mathfrak{Q}$, étant composé avec un autre, fournira un résultat dont chaque terme contient les déterminants qui divisent Π, et, par suite, sera lui-même de l'espèce $\mathfrak{P}$ ou de l'espèce $\mathfrak{Q}$.

Pour démontrer le théorème, nous n'aurons donc qu'à établir la réductibilité des covariants obtenus en composant ensemble des termes $G_a, G_b, \ldots$ respectivement pris dans $F_a, F_b, \ldots$ et appartenant tous à l'espèce $\mathfrak{R}$.

58. Soient a, b, c,... des symboles qui représentent respectivement les fonctions $G_a, G_b, \ldots$. Le résultat de la composition de ces fonctions pourra s'exprimer linéairement par des termes de la forme

$$(112) \qquad (\mathrm{ab})^\alpha (\mathrm{bc})^\beta (\mathrm{ca})^\gamma \ldots \mathrm{a}_x^t \mathrm{b}_x^u \mathrm{c}_x^v \ldots,$$

où la somme des exposants $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ est évidemment égale à U.

Chacune des fonctions $G_a, G_b, \ldots$ étant d'ailleurs un produit de covariants de l'espèce R, dont l'ordre est au moins $2l$, son ordre sera au moins égal à $2l$. Donc le covariant (112) pourra s'exprimer (**45**) au moyen de trois sortes de termes :

1° Des termes $\mathfrak{P}'$, contenant en facteur une puissance de déterminant supérieure à l, telle que $(\mathrm{ab})^{l+\rho}$.

2° Des termes $\mathfrak{Q}'$, contenant en facteur un produit tel que $(\mathrm{ab})^l (\mathrm{bc})^l (\mathrm{ca})^\rho$.

3° Des termes $\mathfrak{R}'$, formés de produits de covariants de l'espèce

$$(113)\qquad R' = (ab)^{\mu_1}(bc)^{\nu_1}(cd)^{\mu'_1}\ldots a_x^{l'_1} b_x^{u'_1} c_x^{v'_1}\ldots,$$

où μ_1, ν_1, μ'_1,... satisfont à des relations analogues aux relations (84).

59. Les termes $\mathfrak{R}'$, qui seraient des produits de plusieurs facteurs R′, sont tout réduits. Mais dans ceux qui ne contiendraient qu'un seul facteur R′, on aurait évidemment

$$(114)\qquad \mu_1 + \nu_1 + \mu'_1 + \ldots = \alpha + \beta + \gamma + \ldots = U < \varphi(k).$$

D'ailleurs, le nombre des symboles a, b, c, d,... est k. Donc, d'après la définition de la fonction φ, R′ pourra s'exprimer par des termes $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ et par une fonction entière de covariants de degré moindre. Cette dernière portion de l'expression étant évidemment réduite, tout revient à prouver que les termes des espèces $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}'$ sont réductibles.

60. Considérons un terme de l'espèce $\mathfrak{P}'$, tel que

$$(115)\qquad (ab)^{\alpha}(bc)^{\beta}(ca)^{\gamma}\ldots a_x^{l'} b_x^{u''} c_x^{v''}\ldots,\quad (\alpha > l).$$

Il peut s'exprimer (**27**) au moyen des composés des covariants

$$(116)\qquad H_\rho = (ab)^{\rho} a_x^{l+\alpha+\gamma+\ldots-\rho} b_x^{u+\alpha+\beta+\ldots-\rho},\quad \text{où}\quad (\rho \geqq \alpha),$$

avec des covariants $\mathfrak{H}$ formés avec c....

Soient $[H_\rho, \mathfrak{H}]_\theta$ un de ces composés; σ le nombre des déterminants que $\mathfrak{H}$ contient en facteurs. Ce composé devant avoir le même ordre que le covariant (115), on aura

$$(117)\qquad \rho + \sigma + \theta = \alpha + \beta + \gamma + \ldots = U.$$

61. D'ailleurs, H_ρ est le $\rho^{\text{ième}}$ composé des covariants G_a et G_b; et si nous exprimons de nouveau ces covariants par les symboles a, a',... et b, b',..., nous aurons, à des facteurs constants près,

$$(118)\qquad G_a = R_0 R_1\ldots,\quad G_b = r_0 r_1\ldots,$$

où R_0, R_1,... et r_0, r_1,... sont des produits symboliques de l'espèce R, respectivement formés avec a, a',... et avec b, b',....

G_a et G_b étant ainsi exprimés, H_ρ sera (**20** et **27**) la moyenne d'une somme de termes tels, que, Ψ désignant l'un quelconque d'entre eux, on aura

$$(119)\qquad H_\rho = \Psi - \Sigma k_{\alpha\beta\gamma}[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma,$$

où F_α et $\mathfrak{F}_\beta$ sont respectivement formés avec a, a',... et avec b, b',..., et où l'ordre γ de la composition est $< \rho$.

On aura, par suite,

$$(120)\qquad [H_\rho, \mathfrak{H}]_\theta = [\Psi, \mathfrak{H}]_\theta + \Sigma k_{\alpha\beta\gamma}\{[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma, \mathfrak{H}\}_\theta.$$

62. Or, si, dans l'expression $\{[F_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma, \mathfrak{H}\}_\theta$, on remplace les symboles c, d,... par ceux des fonctions primitives c, c',...; d, d',...; ..., par la méthode de la Section III, on verra immédiatement que, dans chaque terme de l'expression obtenue, le nombre des déterminants formés avec des symboles de catégories différentes sera $\gamma + \sigma + \theta$, quantité moindre que $\rho + \sigma + \theta = U$, et *a fortiori* moindre que λ. Donc chacun de ces termes sera réductible, par hypothèse.

63. Il reste à prouver qu'en choisissant convenablement le terme Ψ on peut faire en sorte que $[\Psi, \mathfrak{H}]_\theta$ soit également réductible.

Or soit

$$(121)\qquad R_0 = (aa')^\mu (a'a'')^\nu \ldots a_x^{p-\mu} \ldots,$$

$$(122)\qquad r_0 = (bb')^{\mu_1} (b'b'')^{\nu_1} \ldots b_x^{q-\mu_1} \ldots.$$

Nous prendrons pour Ψ celui des termes de H_ρ où le déterminant (ab) figure avec l'exposant le plus élevé. Cet exposant ε sera évidemment égal au moindre des trois nombres ρ, $p-\mu$, $q-\mu_1$. D'ailleurs, p et q sont au moins égaux à $2l$, μ et μ_1 au plus égaux à l, et $\rho > l$. Donc $\varepsilon \overline{\gtrless} l$, et si μ et μ_1 sont $< l$, ε sera $> l$. Donc Ψ, et par suite $[\Psi, \mathfrak{H}]_\theta$, seront de l'espèce $\mathfrak{P}$.

Supposons, au contraire, l'une des quantités μ ou μ_1, par exemple μ, égale à l; ε étant au moins égal à l, Ψ sera divisible par $(aa')^l(ab)^l$

et résultera de la combinaison de covariants X formés avec a, a', b, et divisibles par $(aa')^l(ab)^l$ avec d'autres covariants. Ces covariants X peuvent être réduits à la forme $\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}+\mathfrak{R}$. Mais le nombre des déterminants que peut contenir en facteurs un covariant d'espèce $\mathfrak{R}$ et du troisième degré est au plus égal à $l+\frac{l}{2}$, quantité $< 2l$. Donc X se réduit à des termes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ seulement. Les termes de Ψ et de $[\Psi, \mathfrak{H}]_0$, qui s'en déduisent par composition, seront de la même forme.

64. Considérons maintenant un terme de l'espèce $\mathfrak{Q}'$. L'existence d'un terme de cette sorte suppose que les covariants G_a, G_b, G_c, respectivement représentés par a, b, c, aient leur ordre précisément égal à $2l$ (**45**).

Cela posé, le terme $\mathfrak{Q}'$, que l'on considère, peut s'exprimer au moyen des composés de covariants

$$H_{\rho_1}=(\mathrm{ab})^l(\mathrm{bc})^l(\mathrm{ca})^{\rho_1}\mathrm{a}_x^{l-\rho_1}\mathrm{c}_x^{l-\rho_1}, \quad \text{où} \quad \rho_1 \overline{\gtrless} \rho > 0, \tag{123}$$

avec d'autres covariants $\mathfrak{H}$.

Exprimons de nouveau ces covariants par les symboles a, a',..., b, b',... des fonctions primitives. Le covariant H_{ρ_1} pourra être ramené à la forme $\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}+\mathfrak{R}$; mais son ordre est $< 2l$, et chaque terme de la forme $\mathfrak{R}$ est un produit de facteurs d'ordre au moins égal à $2l$. Donc il ne peut exister de termes $\mathfrak{R}$ dans l'expression de H_{ρ_1}, mais seulement des termes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ qui, composés avec ceux de $\mathfrak{H}$, donneront encore des termes de même forme.

Le théorème est donc complétement établi.

65. Corollaire. — *Si un covariant de l'espèce*

$$R=(ab)^\mu(bc)^\nu(cd)^{\mu'}\ldots a_x^{p-\mu}\ldots \tag{124}$$

est irréductible, la somme λ de $k-1$ termes quelconques $t_1,\ldots, t_{k-1}$, pris dans la suite $\mu, \nu, \mu',\ldots$, sera au moins égale à $\varphi(k)$.

Marquons en effet, dans R, les déterminants affectés des exposants $t_1,\ldots, t_{k-1}$, puis réunissons dans une même catégorie les symboles qui se trouvent associés dans les déterminants restants; on aura évidemment k catégories, et R contiendra λ déterminants formés des symboles de deux catégories différentes. Donc $\lambda \geqq \varphi(k)$ (56).

Cela posé, soient δ le degré du covariant (124) supposé irréductible; S la somme $\mu + \nu + \mu' + \ldots$. On aura, d'après ce qui précède,

$$(125)\qquad S - \mu = \nu + \mu' + \ldots \geqq \varphi(\delta - 1),$$

d'où, en désignant par $f(\delta)$ la limite inférieure de μ,

$$S \geqq \varphi(\delta - 1) + f(\delta).$$

Donc S aura pour limite inférieure la quantité

$$(126)\qquad \varphi(\delta) = \varphi(\delta - 1) + f(\delta).$$

Cette valeur de $\varphi(\delta)$ sera un entier impair. En effet, $\varphi(2)$ et $\varphi(3)$ sont impairs; et nous allons montrer que, si $\varphi(2), \ldots, \varphi(\delta - 1)$ sont impairs, $f(\delta)$ sera pair, et par suite $\varphi(\delta)$ impair.

Deux cas seront à distinguer dans la recherche de $f(\delta)$.

66. *Premier cas.* — La suite $\mu, \nu, \mu', \ldots$ se termine par un terme $\mu^{(i)}$ de l'espèce μ. On aura, dans ce cas, $\delta = 2i + 2$.

On aura (65)

$$(127)\qquad \nu + \nu' + \ldots + \nu^{(i-1)} + \mu^{(i)} \geqq \varphi(i + 2).$$

Mais on a, d'autre part,

$$(128)\quad \mu' \leqq \mu - \nu - \varepsilon, \quad \mu'' \leqq \mu' - \nu' - \varepsilon', \ldots, \quad \mu^{(i)} \leqq \mu^{(i-1)} - \nu^{(i-1)} - \varepsilon^{(i-1)},$$

ou, en ajoutant et posant $\varepsilon + \varepsilon' + \ldots + \varepsilon^{(i-1)} = \eta$,

$$(129)\qquad \mu \geqq \nu + \nu' + \ldots + \nu^{(i-1)} + \mu^{(i)} + \eta \geqq \varphi(i + 2) + \eta.$$

Donc μ est au moins égal à $\varphi(i + 2)$. Mais, s'il lui était égal, il serait impair par hypothèse, $i + 2$ étant $< \delta$; on aurait donc $\varepsilon = 1$, d'où $\eta \geqq 1$, et l'inégalité (129) ne serait pas satisfaite. La valeur minimum de μ sera donc le nombre pair $f(2i + 2)$ donné par la formule

$$(130)\qquad f(2i + 2) = \varphi(i + 2) + 1.$$

67. *Deuxième cas.* — La suite $\mu, \nu, \mu', \ldots$ se termine par un terme $\nu^{(i)}$. On aura, dans ce cas, $\delta = 2i + 3$.

On aura (65), d'une part,

$$\nu + \nu' + \ldots + \nu^{(i)} \overline{\gtrless} \varphi(i+2), \tag{131}$$

et, d'autre part,

$$\nu + \nu' + \ldots + \nu^{(i)} + \mu^{(i)} \overline{\gtrless} \varphi(i+3). \tag{132}$$

On a d'ailleurs

$$\mu' \overline{\lessgtr} \mu - \nu - \varepsilon, \quad \ldots, \quad \mu^{(i)} \overline{\lessgtr} \mu^{(i-1)} - \nu^{(i-1)} - \varepsilon^{(i-1)}, \quad \nu^{(i)} \overline{\lessgtr} \tfrac{1}{2}\mu^{(i)}, \tag{133}$$

d'où, en posant $\varepsilon + \varepsilon' + \ldots + \varepsilon^{(i-1)} = \eta$,

$$\mu \overline{\gtrless} \nu + \ldots + \nu^{(i)} + \frac{\mu^{(i)}}{2} + \eta \overline{\gtrless} \frac{\varphi(i+2) + \varphi(i+3)}{2} + \eta. \tag{134}$$

Or $\varphi(i+2)$ et $\varphi(i+3)$ sont impairs, par hypothèse. Donc $\frac{\varphi(i+2)+\varphi(i+3)}{2}$ est un entier. S'il est pair, on pourra le prendre pour limite inférieure de μ. S'il est impair, la limite cherchée le surpassera d'une unité; car l'hypothèse $\mu = \frac{\varphi(i+2)+\varphi(i+3)}{2}$ donnerait $\varepsilon = 1$, $\eta \overline{\gtrless} 1$, et, par suite, ne satisferait pas à l'inégalité (134).

On aura donc

$$f(2i+3) = \frac{\varphi(i+2) + \varphi(i+3)}{2} + \eta, \tag{135}$$

η étant égal à 0 ou à 1, et choisi de telle sorte que $f(2i+3)$ soit pair.

68. Récapitulant les résultats qui précèdent, on aura le théorème suivant :

Théorème. — *Soient φ et f deux fonctions numériques définies par* *les relations*

$$(136)\quad \varphi(1)=0,\ \varphi(2)=1,\ \varphi(3)=3,\ f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=2,$$

$$(137)\quad \begin{cases} f(2i+2)=\varphi(i+2)+1,\\ f(2i+3)=\dfrac{\varphi(i+2)+\varphi(i+3)}{2}+\eta,\\ \varphi(\delta)=\varphi(\delta-1)+f(\delta), \end{cases}$$

[*où* η *est égal à* 0 *ou* 1, *et choisi de telle sorte que* $f(2i+3)$ *soit pair*]; *soit enfin* ψ *la fonction inverse de* f.

Soient, d'autre part, A, B, C,... *des formes quelconques, d'ordre au moins égal à* $2l$. *Tout covariant* Φ *de ce système pourra s'exprimer par des termes des espèces* $\mathfrak{P}$ *et* $\mathfrak{Q}$ (*voir* le n° **45**) *et par une fonction entière* $\mathfrak{R}$ *de covariants irréductibles de l'espèce* R. *Le degré* δ *de ces covariants irréductibles ne pourra surpasser* $\psi(l)$.

69. *Remarque.* — La limite $\psi(l)$ trouvée ci-dessus sera très-resserrée; car il est aisé de voir que la fonction φ inverse de ψ croît plus rapidement qu'une puissance quelconque de la variable.

Le calcul de proche en proche des fonctions f et φ, pour les diverses valeurs de δ, s'effectuera d'ailleurs avec une grande facilité par les formules (137). On formera ainsi le tableau suivant :

$\delta=$	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,...,
$f(\delta)=$	4,	6,	8,	10,	14,	18,	22,	26,	32,...,
$\varphi(\delta)=$	7,	13,	21,	31,	45,	63,	85,	111,	143,....

Il est d'ailleurs aisé de voir que $f(\delta)$ et $\varphi(\delta)$ sont les limites les plus précises que le théorème du n° **65** puisse fournir pour μ et pour S. En effet, δ étant égal à $2i+2$ ou $2i+3$, posons

$$\mu=f(\delta),\quad \mu'=f(\delta-1),\ldots,\quad \mu^{(i)}=f(\delta-i),$$

puis

$$\nu=\mu-\mu',\ldots,\quad \nu^{(i-1)}=\mu^{(i-1)}-\mu^{(i)},$$

et enfin, si $\delta=2i+3$,

$$\nu^{(i)}=\tfrac{1}{2}\mu^{(i)}.$$

On vérifiera facilement : 1° que les exposants $\nu, \nu', \ldots, \nu^{(i-1)}$ forment une suite décroissante, dont le premier terme est au plus égal à $\frac{1}{2}\mu^{(i)}$; 2° que la somme $\mu + \nu + \mu' + \nu' + \ldots$ est égale à $\varphi(\delta)$ ou à $\varphi(\delta) + 1$. Si c'est ce dernier cas qui se présente, on diminuera d'une unité le plus grand des exposants $\nu, \nu', \ldots$. On obtiendra ainsi une suite d'exposants ayant pour somme $\varphi(\delta)$, et dont le plus grand est $f(\delta)$. D'ailleurs, $k-1$ quelconques de ces exposants auront une somme au moins égale à $\varphi(k)$; condition reconnue nécessaire pour que le covariant R, formé avec cette suite d'exposants, soit irréductible.

Nous supprimons la démonstration de ces propositions, qui se déduit sans peine des formules (137). Nous nous bornerons à faire observer que la fonction f peut être définie à elle seule, sans l'intervention de la fonction φ. Les formules (137) donnent en effet

$$f(2i+3) - f(2i+2) = \frac{\varphi(i+3) - \varphi(i+2)}{2} + \eta - 1 = \frac{f(i+3)}{2} + \eta - 1,$$
$$f(2i+2) - f(2i+1) = \frac{\varphi(i+2) - \varphi(i+1)}{2} + 1 - \eta' = \frac{f(i+2)}{2} + 1 - \eta',$$

η et η' étant égaux à 0 ou à 1 et devant être calculés de telle sorte que les seconds membres des égalités ci-dessus soient pairs comme les premiers.

Ces égalités pourront encore s'écrire comme il suit :

$$f(2i+3) - f(2i+2) = 2\mathrm{E}\left(\frac{f(i+3)}{4}\right),$$
$$f(2i+2) - f(2i+1) = 2\mathrm{E}\left(\frac{f(i+2)+2}{4}\right),$$

$\mathrm{E}(x)$ désignant le plus petit entier contenu dans x.

§ VIII. — Limites de l'ordre et du degré des covariants indépendants.

70. *Définitions.* — Soient A, B,… un système quelconque de formes en nombre quelconque, mais dont les ordres ne surpassent pas un nombre donné n; Φ un covariant quelconque de ce système.

Nous appellerons *poids* de ce covariant l'expression

$$(138) \qquad p_n d_n + p_{n-1} d_{n-1} + \ldots + p_1 d_1,$$

d_ρ désignant son degré total par rapport aux coefficients de celles des fonctions données qui sont d'ordre ρ; et $p_n, \ldots, p_1$ une suite de nombres convenablement choisis.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que ces nombres aient été déterminés de proche en proche, de manière à satisfaire aux inégalités suivantes :

$$(139) \qquad p_n = 1, \ldots, \quad p_{2\mu} \overline{\gtrless} 2 p_{2\mu+1}, \quad p_{2\mu-1} \overline{\gtrless} \tfrac{3}{2} p_{2\mu}, \ldots,$$

et en outre à celle-ci

$$(140) \qquad p_l \overline{\gtrless} T_l,$$

où nous posons, pour abréger,

$$(141) \qquad T_l = S_l \frac{p_{2l}}{l} + S_{l+1} \frac{p_{2l+2}}{l+1} + \ldots + S_m \frac{p_{2m}}{m},$$

$$(142) \quad S_l = (2l+1)\psi(l) + (2l+3)\psi(l+1) + \ldots + (2m+1)\psi(m),$$

m désignant le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$, et ψ étant la fonction numérique définie au n° **68**.

Nous compléterons enfin la série des quantités S, T. p par l'introduction des deux quantités suivantes :

$$(143) \qquad S_0 = S_1, \quad p_0 = T_0 = T_1 + p_1 S_1.$$

71. Nous dirons que le covariant Φ est de la *classe* l, si parmi les symboles $a, b, \ldots$ qui figurent dans son expression il n'y en a aucun qui représente une fonction d'ordre inférieur à $2l$.

Nous dirons qu'un covariant de la classe l est de l'espèce X, s'il est de la forme MN, où M désigne un produit symbolique d'ordre au plus égal à S_l et de poids au plus égal à T_l, et N un autre covariant ou une simple constante.

Nous dirons enfin qu'un covariant Φ est de l'espèce Y, s'il peut s'exprimer linéairement au moyen de composés tels que $[F, \mathcal{F}]_\mu$, où F est un produit symbolique jouissant des propriétés suivantes :

1° Son ordre ω ne surpasse pas n;

2° Son poids π ne surpasse pas p_ω;

$\mathcal{F}$ pouvant d'ailleurs désigner un covariant quelconque.

72. Il résulte évidemment de cette dernière définition que *tout covariant* $[\Phi, \Phi']_\gamma$, *composé de deux autres, dont l'un*, Φ, *est de l'espèce* Y, *sera lui-même de l'espèce* Y. En effet, il s'exprimera linéairement au moyen de covariants tels que

$$\{[F, \mathcal{F}]_\mu, \Phi'\}_\gamma. \tag{144}$$

Or soient $a, b, \ldots$ les symboles qui figurent dans l'expression de F; a, b,... ceux qui figurent dans $\mathcal{F}$ et Φ'. Développons le covariant (144); son expression sera formée d'une somme de termes contenant chacun en facteur le produit L des déterminants que F contenait lui-même en facteurs. Chacun de ces termes pourra à son tour s'exprimer linéairement (**27**) au moyen de composés $[F_1, \Psi_1]_{\lambda_1}$, $[F_2, \Psi_2]_{\lambda_2}, \ldots$, où Ψ_1, $\Psi_2, \ldots$ sont des covariants formés avec les symboles a, b,... et F_1, $F_2, \ldots$ des produits symboliques formés avec $a, b, \ldots$ et contenant L en facteur.

Soit F_1 l'un de ces produits. Puisqu'il est divisible par L, son ordre ω_1 sera au plus égal à ω. D'autre part, il est formé des mêmes symboles que F; donc son poids est égal à π et ne surpasse pas p_ω; à plus forte raison il ne saurait dépasser p_{ω_1}, les nombres p allant en croissant, d'après les relations (139), à mesure que leur indice diminue.

Donc $[F_1, \Psi_1]_{\lambda_1}$ sera de la forme Y; et il en sera de même de chacun des autres termes $[F_2, \Psi_2]_{\lambda_2}, \ldots$.

73. Lemme. — *Un produit symbolique* Φ *sera de l'espèce* Y : 1° *s'il contient en facteur* $(ab)^{l+1}$, *les symboles* a, b *représentant des fonctions d'ordre* $2l$ *ou* $2l+1$; 2° *s'il contient un facteur* $(ab)^l(bc)^l(ca)^\rho$, ρ *étant* > 0, *et* a, b, c *représentant des fonctions d'ordre* $2l$.

En effet, soit d'abord $l = 0$. Φ contiendra en facteur l'invariant

(ab), dont l'ordre, étant nul, sera $< n$, et dont le poids sera $2p_1$, quantité inférieure à p_0, d'après les relations (142) et (143); et Φ sera un composé de cet invariant, où l'ordre de la composition est égal à zéro. Il sera donc de l'espèce Y.

Soit, d'autre part, $l > 0$. Φ pourra s'exprimer (**27**) en fonction linéaire de composés de produits symboliques F formés avec a, b et divisibles par $(ab)^{l+1}$, ou formés avec a, b, c et divisibles par $(ab)^l(bc)^l(ca)^\rho$, avec d'autres covariants, formés avec les autres symboles, et Φ sera de l'espèce Y si les covariants F en sont (**72**).

Supposons d'abord que F soit divisible par $(ab)^{l+1}$. Soient q, r les ordres des fonctions correspondantes à a et b, et soit $q \stackrel{=}{<} r$. L'ordre ω de F sera au plus égal à $q + r - 2l - 2$, quantité égale à $q - 1$ ou à $q - 2$, suivant qu'on aura $r = 2l + 1$ ou $r = 2l$. On aura, dans tous les cas, $\omega < q$, et *a fortiori* $< n$, n étant le maximum de l'ordre des fonctions A, B, C,... que l'on considère.

D'autre part, le poids π de F sera égal à $p_q + p_r$. Si $r = q = 2l + 1$, il sera égal à $2p_{2l+1}$, et, d'après les relations (139), au plus égal à p_{2l}, qui lui-même est au plus égal à p_ω, ω étant au plus égal à $2l$.

Si $q = 2l$, $r = 2l + 1$, on aura, d'après les mêmes relations,

$$p_q + p_r \stackrel{=}{<} \tfrac{3}{2} p_{2l} \stackrel{=}{<} p_{2l-1} \stackrel{=}{<} p_\omega.$$

ω étant au plus égal à $2l - 1$.

Enfin, si $q = r = 2l$, on aura

$$p_q + p_r = 2p_{2l} < p_{2l-2} < p_\omega,$$

ω étant au plus égal à $2l - 2$.

Supposons, en second lieu, F divisible par $(ab)^l(bc)^l(ca)^\rho$, a, b, c représentant des fonctions d'ordre $2l$. On aura

$$\omega = 6l - 4l - 2\rho = 2l - 2\rho \stackrel{=}{<} 2l - 2 < n;$$

et l'on aura, d'autre part,

$$\pi = 3p_{2l} \stackrel{=}{<} p_{2l-2} \stackrel{=}{<} p_\omega.$$

Donc F sera bien, dans tous les cas, de l'espèce Y.

74. THÉORÈME. — *Un covariant quelconque Φ peut s'exprimer en fonction linéaire de covariants des espèces X et Y.*

Supposons d'abord que les symboles a, b,... qui figurent dans Φ représentent tous des fonctions d'ordre $2l$ ou $2l+1$. On sait (**68**) que Φ sera formé de trois espèces de termes :

1° Des termes $\mathfrak{P}$ divisibles par un facteur tel que $(ab)^{l+1}$; ils seront de l'espèce Y (**75**).

2° Des termes $\mathfrak{Q}$ divisibles par un facteur tel que $(ab)^l (bc)^l (ca)^\rho$, où $\rho > 0$, a, b, c représentant des fonctions d'ordre $2l$. Ces termes seront également de l'espèce Y (**75**).

3° Une fonction entière $\mathfrak{R}$ de produits symboliques R, R_1,..., de degré au plus égal à $\psi(l)$ et de la forme

$$(145)\qquad (ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu'} (de)^{\nu'}, \ldots a_x^\alpha b_x^\beta, \ldots$$

μ, ν,... satisfaisant aux conditions

$$(146)\qquad \mu \overline{\overline{<}} l,\quad \nu \overline{\overline{<}} \frac{\mu}{2},\quad \mu' \overline{\overline{<}} \mu - \nu - \varepsilon,\quad \nu' \overline{\overline{<}} \frac{\mu'}{2}, \ldots.$$

Soient R l'un de ces produits, δ son degré, ω son ordre, π son poids. Les δ symboles a, b, c,... qui y figurent représentant des fonctions d'ordre au plus égal à $2l+1$ et au moins égal à $2l$ et de poids au plus égal à p_{2l}, on aura (**68**)

$$(147)\qquad \pi \overline{\overline{<}} p_{2l}\,\delta \overline{\overline{<}} p_{2l}\,\psi(l),$$

$$(148)\qquad \omega \overline{\overline{<}} (2l+1)\delta - 2(\mu+\nu+\mu'+\nu'+\ldots) \overline{\overline{<}} (2l+1)\delta \overline{\overline{<}} (2l+1)\psi(l) \overline{\overline{<}} S_l.$$

$$(149)\qquad \omega \overline{\overline{>}} 2l\delta - 2(\mu+\nu+\mu'+\nu'+\ldots);$$

mais on a

$$\mu \overline{\overline{<}} l,\quad \nu+\mu' \overline{\overline{<}} \mu - \varepsilon \overline{\overline{<}} l,\quad \nu'+\mu'' \overline{\overline{<}} l, \ldots,$$

d'où

$$(150)\qquad \mu+\nu+\mu'+\nu'+\ldots \overline{\overline{<}} tl,$$

t désignant le nombre des exposants μ, μ', μ'',..., lequel est évidemment égal à $\frac{\delta}{2}$ ou à $\frac{\delta-1}{2}$, suivant que δ est pair ou impair. On aura donc

$$(151)\qquad \omega \overline{\overline{>}} 2l\delta - l\delta \overline{\overline{>}} l\delta$$

d'où

$$(152) \qquad \pi = p_{2l}\,\delta \leqq \frac{p_{2l}}{l}\,\omega \leqq S_l\,\frac{p_{2l}}{l} \leqq T_l.$$

Les produits symboliques tels que R ont donc leur ordre non supérieur à S_l et leur poids non supérieur à T_l. Chacun des termes de $\mathfrak{R}$, contenant en facteur un de ces produits, sera de l'espèce X; le théorème sera donc démontré.

On remarquera que le raisonnement qui précède suppose implicitement que $l > 0$; mais si l'on avait $l = 0$, R se réduirait à un facteur linéaire tel que a_x, ayant pour ordre 1 et pour poids p_1, quantités respectivement inférieures à S_0 et T_0.

75. Soit, comme plus haut, m le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$: les covariants de classe m ne pourront évidemment contenir que des symboles de fonctions d'ordre $2m$ ou $2m+1$. Le théorème est donc établi par ce qui précède pour ces covariants.

Nous allons maintenant démontrer que, s'il est vrai pour les covariants de la classe $l+1$, il sera vrai pour la classe l.

Soit Φ un de ces derniers covariants; parmi les symboles qui y figurent, les uns, $a, b, \ldots$ représenteront des fonctions d'ordre supérieur à $2l+1$; les autres, $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots$ des fonctions d'ordre $2l$ ou $2l+1$.

Cela posé, Φ pourra s'exprimer linéairement (**27**) au moyen de composés tels que

$$[F, \mathfrak{F}]_\lambda,$$

où F et $\mathfrak{F}$ sont des covariants respectivement formés avec $a, b, \ldots$ et avec $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots$.

Il faut démontrer que chacun de ces composés s'exprime au moyen de termes des espèces X et Y.

76. Si $\lambda = 0$, ce sera évident. En effet, le composé se réduira dans ce cas à un simple produit. Or $\mathfrak{F}$ est formé d'une somme de termes dont les uns, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, sont de l'espèce Y et les autres, $\mathfrak{R}$, de l'espèce X. Ces termes, respectivement multipliés par F, donneront évidemment des termes de même espèce.

Mais nous allons démontrer que la chose sera vraie pour une valeur quelconque de λ, si elle est vraie pour les valeurs moindres.

77. Le covariant F, étant de la classe $l+1$, pourra, par hypothèse, s'exprimer par une somme de termes des espèces X et Y; d'autre part $\mathfrak{F}$ s'exprimera (**68**) par des termes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, qui sont de l'espèce Y, et des termes $\mathfrak{R}$, qui sont de l'espèce X.

Le composé $[F, \mathfrak{F}]_\lambda$ s'obtient en composant les divers termes de F avec ceux de $\mathfrak{F}$, et ajoutant les résultats. D'ailleurs, si l'un des termes que l'on compose est de l'espèce Y, il en sera de même du résultat (**72**). Il ne reste donc qu'à examiner le résultat de la composition d'un terme de l'espèce X pris parmi ceux de F avec un terme de l'espèce $\mathfrak{R}$.

78. Soient MN et $k\mathrm{RR}_1\ldots$ les deux termes qu'il s'agit de composer (k désignant une constante et R, $\mathrm{R}_1, \ldots$ des produits symboliques de l'espèce R). Le résultat est la moyenne d'une série de termes obtenus en choisissant arbitrairement λ facteurs linéaires σ_x, $\tau_x, \ldots$ parmi ceux qui figurent dans MN, les associant à λ facteurs linéaires s_x, $t_x, \ldots$ arbitrairement choisis parmi ceux de $k\mathrm{RR}_1\ldots$, et remplaçant dans le produit MN $k\mathrm{RR}_1, \ldots$ chaque couple de facteurs associés $\sigma_x s_x$ par le déterminant correspondant (σs) (**20**).

Soit Ψ celui de ces termes obtenus en choisissant pour les associer ensemble les λ premiers facteurs linéaires de chacun des deux produits symboliques MN, $k\mathrm{RR}_1\ldots$. On aura (**27**)

$$[\mathrm{MN}, k\mathrm{RR}_1\ldots]_\lambda = \Psi - \Sigma k_{\alpha\beta\gamma}[\mathrm{F}_\alpha, \mathfrak{F}_\beta]_\gamma,$$

F_α et $\mathfrak{F}_\beta$ étant des covariants respectivement formés avec les symboles $a, b, \ldots$ et a, b, ... et γ étant un entier $<\lambda$. Les covariants $[\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta]_\gamma$ pourront, par hypothèse, s'exprimer par des termes des espèces X et Y. Il ne restera donc à considérer que le terme Ψ.

Soient d'ailleurs Ω et Π l'ordre et le poids de M, ω et π, ω_1 et $\pi_1, \ldots$ l'ordre et le poids de R, $\mathrm{R}_1, \ldots$.

79. Supposons d'abord $l>0$.

Deux cas seront à distinguer, suivant que λ sera ou non inférieur à Ω.

Premier cas, $\lambda < \Omega$. — Les λ premiers facteurs de M devront être associés aux λ premiers facteurs de $k\mathrm{RR}_1, \ldots$ Supposons que, pour trouver ce nombre de facteurs, il ait fallu prendre tous ceux de R, $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_{\alpha-1}$ et tout ou partie de ceux de R_α. On aura

(153) $$\Psi = \mathrm{M}'\mathrm{N}k\mathrm{R}_{\alpha+1}, \ldots,$$

M′ étant un covariant formé avec les symboles de M, R, ..., R_α.

Soient Ω' et Π' l'ordre et le poids de M′. On aura

(154) $$\Omega' = \Omega + \omega + \ldots + \omega_\alpha - 2\lambda,$$

(155) $$\Pi' = \Pi + \pi + \ldots + \pi_\alpha.$$

On a d'ailleurs par hypothèse

(156) $$\Omega \overset{=}{<} \mathrm{S}_{l+1}, \quad \Pi \overset{=}{<} \mathrm{T}_{l+1}.$$

On a, d'autre part,

(157) $$\omega + \ldots + \omega_{\alpha-1} < \lambda < \Omega,$$

et enfin, d'après les relations (148) et (152),

(158) $$\omega \overset{=}{<} (2l+1)\psi(l), \ldots, \omega_\alpha \overset{=}{<} (2l+1)\psi(l),$$

(159) $$\pi \overset{=}{<} \frac{p_{2l}}{l}\omega, \ldots, \pi_\alpha \overset{=}{<} \frac{p_{2l}}{l}\omega_\alpha.$$

On en conclut

(160) $$\Omega' < \Omega + \omega_\alpha < \mathrm{S}_{l+1} + (2l+1)\psi(l) < \mathrm{S}_l,$$

(161) $$\begin{cases} \Pi' \overset{=}{<} \Pi + \dfrac{p_{2l}}{l}(\omega + \ldots + \omega_\alpha) < \Pi + \dfrac{p_{2l}}{l}(\Omega + \omega_\alpha) \\ \qquad < \mathrm{T}_{l+1} + \dfrac{p_{2l}}{l}\mathrm{S}_l < \mathrm{T}_l. \end{cases}$$

Ces deux inégalités montrent que Ψ est de l'espèce X.

80. *Deuxième cas*, $\lambda \overset{=}{>} \Omega$. — Les Ω facteurs linéaires de M se trouveront associés aux Ω premiers facteurs linéaires du produit $k\mathrm{RR}_1 \ldots$ Supposons que, pour trouver ces Ω facteurs il faille prendre tous les facteurs linéaires de R,..., $R_{\alpha-1}$ et tout ou partie de ceux de R_α. Soit

$$R_\alpha = (ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu'}, \ldots, a_x^\sigma b_x^\tau c_x^\nu, \ldots,$$

et supposons, pour fixer les idées, qu'on ait dû y prendre les $\sigma + \tau$ facteurs a_x, b_x et θ des facteurs c_x.

L'un des deux nombres $\mu' + \upsilon - \theta$, $\nu + \theta$ sera $\overline{\gtrless} l$. En effet, leur somme est égale à $\nu + \mu' + \upsilon$, ordre de la fonction représentée par le symbole c; cet ordre est égal à $2l$ ou à $2l + 1$.

1° Supposons $\mu' + \upsilon - \theta \overline{\gtrless} l$. Partageons les symboles en deux catégories dont la première sera formée des symboles contenus dans M, R,..., $R_{\alpha-1}$, auxquels on joindra les symboles a, b, c. On pourra (27) exprimer Ψ en fonction linéaire de composés tels que $[G, \mathcal{G}]_\rho$, où G et $\mathcal{G}$ sont des covariants respectivement formés avec les symboles de première et de seconde catégorie, G étant d'ailleurs divisible par le produit L des déterminants formés par les symboles de la première catégorie dans l'expression de Ψ. Or L absorbe tous ces symboles, sauf $\mu' + \upsilon - \theta$ des symboles c. Donc G a son ordre Ω' au plus égal à $\mu' + \upsilon - \theta$, et par suite au plus égal à l. D'autre part, son poids Π' est au plus égal à $\Pi + \pi + \ldots + \pi_\alpha$ (il sera moindre si c n'est pas le dernier des symboles que contient R_α).

On a d'ailleurs, comme dans le cas précédent,

$$(162) \qquad \Pi' \overline{\gtrless} \Pi + \pi + \ldots + \pi_\alpha < T_l;$$

mais on a, en vertu de la relation (140),

$$(163) \qquad T_l \overline{\gtrless} p_l,$$

et *a fortiori*, Ω' étant $\overline{\gtrless} l$, $T_l \overline{\gtrless} p_{\Omega'}$; on aura donc

$$(164) \qquad \Pi' < p_{\Omega'}, \quad \text{avec} \quad \Omega' \overline{\gtrless} l < n.$$

Donc chacun des composés $[G, \mathcal{G}]_\rho$, à l'aide desquels Ψ est formé, est de l'espèce Y.

2° Supposons $\nu + \theta \overline{\gtrless} l$. On partagera de même les symboles en deux catégories, mais en mettant cette fois c dans la seconde catégorie. Le raisonnement restera le même, L absorbant tous les symboles de la première catégorie, sauf θ symboles de M et ν symboles b.

Le théorème est donc complétement établi.

81. Soit maintenant $l = 0$. Les covariants R, $R_1, \ldots$ se réduiront à des fonctions linéaires telles que a_x, $b_x, \ldots$ ayant pour poids p_1. Cela posé, si $\lambda < \Omega$, on aura

$$\Psi = M'.Nk R_\lambda \ldots,$$

M' étant un covariant formé avec les symboles de M, $R, \ldots, R_{\lambda-1}$, lequel aura évidemment pour ordre $\Omega - \lambda$, et pour poids $\Pi + \lambda p_1$; et comme on a, par hypothèse,

$$\Omega \leqq S_1, \quad \Pi \leqq T_1,$$

on aura, *a fortiori*,

$$\Omega - \lambda \leqq S_1 \leqq S_0, \quad \Pi + \lambda p_1 < \Pi + \Omega p_1 < T_1 + p_1 S_1 < T_0,$$

inégalités qui montrent que Ψ est de l'espèce X.

Soit enfin $\lambda \geqq \Omega$. On aura évidemment

$$\Psi = M'.N',$$

M' étant le $\Omega^{ième}$ composé de M avec $RR_1 \ldots R_{\Omega-1}$, et N' un terme d'un des composés de N avec $kR_\Omega R_{\Omega+1} \ldots$. D'ailleurs, l'ordre de M' sera nul, et *a fortiori* $< S_0$; et son poids sera

$$\Pi + \Omega p_1 \leqq T_1 + S_1 p_1 \leqq T_0,$$

d'où il résulte encore que Ψ est de l'espèce X.

82. Théorème. — *Un covariant quelconque Φ peut s'exprimer en fonction entière de covariants dont l'ordre ne surpasse pas S_0, et dont le poids ne surpasse pas T_0*

Le théorème est évident pour les covariants du premier degré, qui ne sont autres que les fonctions A, B, ... elles-mêmes.

Nous établirons que, s'il est vrai pour les covariants de degré inférieur à δ, il le sera encore pour les covariants de degré δ.

Ces covariants s'expriment linéairement par des covariants des espèces X et Y, qu'il suffira d'examiner séparément.

83. Or un covariant MN, de l'espèce X, est le produit d'un covariant M, dont l'ordre ne surpasse pas S_0, et dont le poids ne surpasse pas T_0, par un covariant N de degré moindre auquel on pourra appliquer le théorème.

84. Considérons, d'autre part, un covariant $[F, \mathfrak{F}]_\mu$ de l'espèce Y; soient ω l'ordre de F, π son poids, qui sera, par hypothèse, au plus égal à p_ω.

Faisons abstraction, pour un instant, des relations qui existent entre la fonction F et les fonctions primitives A, B,..., et traitons-la comme si c'était une fonction indépendante, d'ordre ω; assignons-lui, en outre, au lieu du poids π, le poids p_ω, qui convient à son ordre. Dans ces nouvelles conditions, $[F, \mathfrak{F}]_\mu$ deviendra un covariant des fonctions A, B,..., F. Son degré sera inférieur à δ; car elle ne contient qu'un seul symbole f, représentant la fonction F, au lieu des symboles a, b,... des fonctions primitives que contenait le covariant F.

On pourra donc, par hypothèse, exprimer $[F, \mathfrak{F}]_\mu$ en fonction entière de covariants K, K',..., dont l'ordre et le poids ne surpasseront pas S_0 et T_0.

Revenons maintenant aux conditions primitives, où F n'est plus une fonction indépendante, mais un covariant de A, B,.... L'expression de $[F, \mathfrak{F}]_\mu$ se déduira de celle qui vient d'être obtenue en éliminant de l'expression des covariants K, K',... le symbole f du covariant F, comme il est indiqué dans la Section III. Il est clair que cette opération n'altérera pas l'ordre de ces covariants. D'autre part, leur poids ne pourra être augmenté, le symbole f, auquel on avait assigné le poids p_ω, se trouvant remplacé par les symboles a, b,..., dont le poids total est π. Donc l'ordre et le poids des covariants K, K',... continueront à ne pas surpasser S_0 et T_0.

85. Corollaire. — *Si le nombre des fonctions* A, B,.. *est limité, leurs covariants s'exprimeront en fonction entière d'un nombre limité de covariants indépendants.*

Il est clair, en effet, qu'on ne pourra former qu'un nombre limité de covariants, dont le poids soit inférieur à T_0.

Sur les cas d'exception au théorème des forces vives. Résumé et conséquences d'un Mémoire de M. Betti;

PAR M. LE D^r ÉMILE LEMMI.

Le professeur H. Betti a donné, dans son Mémoire *Sur les espaces d'un nombre quelconque de dimensions* [*], un théorème pour le cas de n variables dont on déduit, dans le cas de trois seules variables, des conséquences d'une haute importance dans quelques problèmes de Mécanique et de Physique mathématique.

Je poserai quelques définitions absolument indispensables :

M. Betti appelle *espace à n dimensions* et désigne par S_n *l'ensemble de tous les systèmes de valeurs réelles qu'on peut donner à n variables de* $-\infty$ *à* $+\infty$; c'est, comme on voit, la *variété* à n dimensions de Riemann [**]. Chaque système de valeurs $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ détermine un point de S_n dont $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées*. Si, entre tous ces systèmes, on considère les systèmes qui satisfont à l'équation

$$(a) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

où F est une fonction *continue* et *monodrome* pour toutes les valeurs réelles des variables, l'espace à $(n-1)$ dimensions, défini par l'équation (a), séparera S_n en deux régions : dans l'une on aura $F < 0$, dans l'autre $F > 0$. S'il est possible de passer d'une manière continue d'un système pour lequel $F < 0$ à un autre système pour lequel $F < 0$ sans passer par un système pour lequel $F = 0$, la région $F < 0$ est un *espace connexe*. On peut en dire autant pour la région $F > 0$.

---

[*] ENRICO BETTI, *Sopra gli spazii d'un numero qualunque di dimensioni.* (*Annali di Matematica pura ed applicata,* serie II^a, tomo IV°, fascicolo II°, p. 140-158.)

[**] B. RIEMANN, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* (*Mémoires de Göttingue*, t. XIII.)

Un espace S_{n-m} à $n-m$ dimensions a la *connexion linéaire* lorsqu'on peut réunir deux quelconques de ses points par une ligne continue entièrement située dans S_{n-m}. Un espace S_{n-1} est *fermé*, s'il divise S_n en deux régions à connexion linéaire, de manière qu'on ne puisse passer de l'une à l'autre sans traverser S_{n-1}. Un espace est *fini* si toutes les coordonnées de ses points ont des valeurs finies. Un certain nombre d'inégalités

$$F_1 < 0, \quad F_2 < 0, \ldots, \quad F_m < 0$$

déterminent une partie R_t d'un espace S_t qui peut être à *connexion linéaire*. La totalité des espaces à $(t-1)$ dimensions

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_m = 0,$$

qui limitent R_t, de manière qu'il soit impossible de passer d'un point de R_t à un point hors de R_t par une ligne continue sans traverser aucun de ces espaces, constitue le *contour* de R_t.

Un espace *fini* et à connexion linéaire est *fermé* ou il a un *contour*.

Si, dans un espace R_n à n dimensions, limité par un seul ou par plusieurs espaces à $(n-1)$ dimensions, chaque espace fermé à m dimensions $(m < n)$ constitue le contour d'un espace à $(m+1)$ dimensions et à *connexion* linéaire entièrement contenu dans R_n, l'espace R_n a une *connexion simple de $m^{ième}$ espèce*. Un espace dont les connexions de toutes les espèces sont simples est *simplement connexe*. Si l'on peut imaginer dans R_n un nombre p_m d'espaces fermés à m dimensions, qui ne puissent pas constituer le contour d'une partie à connexion linéaire d'un espace à $(m+1)$ dimensions toutes situées dans R_n, mais tels que tout autre espace fermé à m dimensions puisse constituer ou *seul*, ou *avec une partie d'entre eux*, ou *avec tous*, le contour d'une partie à connexion linéaire d'un espace à $(m+1)$ dimensions toutes situées dans R_n, on dit que la *connexion* de $m^{ième}$ *espèce* de R_n est d'ordre $(p+1)^{ième}$.

L'ordre de connexion d'un espace à n dimensions ne dépend point de la grandeur ni de la forme de ses éléments. Par conséquent, deux espaces qui se déduisent l'un de l'autre par transformation continue ont leurs ordres de connexion de toutes les espèces égaux. Un point étant simplement connexe, tout espace qui, par transformation continue, se réduit à un point, est simplement connexe. L'espace à n dimensions

$$(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2 < R^2,$$

qui a pour contour l'espace à $(n-1)$ dimensions,

$$(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2 = R^2,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et R étant des constantes, est simplement connexe. On peut, en effet, faire tendre d'une manière continue $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et réduire cet espace au point $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$.

Pour éclaircir quelque peu ces notions, je vais les appliquer très-brièvement aux surfaces (espace à deux dimensions), et à l'espace ordinaire (à trois dimensions) [*].

Les surfaces ont un seul ordre de connexion : *Une surface* S_2 *a pour ordre de connexion* $(p+1)$ *si l'on peut y décrire p lignes fermées qui ne constituent pas le contour d'une de ses parties, mais telles que toute autre ligne fermée, ou seule, ou avec une partie des premières, ou avec toutes, constitue le contour d'une partie de* S_2. La partie du plan comprise dans un *cercle* et la surface de la sphère sont simplement connexes; la surface plane comprise entre deux cercles et la surface du tore ont respectivement leurs ordres de connexion égaux à 2 et à 3.

L'espace ordinaire S_3 (espace à trois dimensions) a deux espèces de connexions, *une connexion de deuxième* et une *de première espèce*. Un espace *ordinaire* R_3 *a sa connexion de deuxième espèce de l'ordre* (p_2+1), *si l'on peut imaginer dans* R_3 p_2 *surfaces fermées qui ne puissent pas former seules le contour d'une partie de* R_3, *mais telles que toute autre surface fermée, imaginée dans* R_3, *ou seule, ou avec une partie des premières, ou avec toutes, forme le contour d'une partie de* R_3. *Un espace ordinaire* R_3 *a sa connexion de première espèce de l'ordre* (p_1+1), *si l'on peut imaginer dans* R_3 p_1 *lignes fermées* $s, s_1, \ldots, s_{p_1}$, *qui*

---

[*] B. Riemann s'est occupé pour la première fois de la connexion des surfaces dans ses *Bases* d'une *Théorie générale des fonctions d'une variable complexe*. (Göttingue, 1851.) La définition de l'ordre de connexion d'une surface donnée par lui se déduit aisément de celle de Betti.

ne constituent pas le contour d'une partie de surface, mais telles que toute autre ligne fermée, ou seule, ou avec une partie des s, ou avec tous les s, constitue le contour d'une partie de surface contenue en R_3. Un espace ordinaire R_3 est *simplement connexe* lorsqu'il a ses *deux connexions du premier ordre* ou *simples;* l'espace compris dans une sphère (réductible par *transformation continue* à un point) est simplement connexe. L'espace compris entre deux sphères concentriques, l'espace compris dans un tore, l'espace compris entre une sphère et un tore et l'espace compris entre deux tores ont respectivement pour ordres de connexion de deuxième espèce 2, 1, 2 et 2, et pour ordres de connexion de première espèce 1, 2, 2 et 3.

Une section transverse a m dimensions ($m < n$) dans un espace limité R_n à n dimensions : c'est un espace à m dimensions, le long duquel la connexion de R_n est interrompue et qui a son contour sur le contour de R_n.

M. Betti démontre que, *pour rendre simplement connexe et réduire, par conséquent, par transformation continue à un point, un espace fini* R_n *à* n *dimensions par des sections transverses simplement connexes, il faut et il suffit d'y faire* p_{n-1} *sections linéaires,* p_{n-2} *sections à deux dimensions,* p_{n-3} *à trois dimensions,...,* p_1 *à* ($n-1$) *dimensions, si* p_1+1, $p_2+1, \ldots, p_{n-1}+1$ *sont les ordres de ses connexions de première, deuxième,...,* $(n-1)^{ième}$ *espèce.* M. Betti démontre encore que :

Lorsqu'un espace fini R_n *est réduit simplement connexe par des sections transverses simplement connexes, chaque espace fermé de m dimensions imaginé en* R_n *forme, avec un nombre d'espaces fermés à m dimensions égal au nombre de sections transverses* $n-m$ *qu'il rencontre, le contour d'un espace à* $(m+1)$ *dimensions contenu dans* R_n.

L'espace ordinaire compris entre deux sphères concentriques se réduit à devenir simplement connexe par une seule *section transverse linéaire* qui va d'un point de la sphère extérieure à un point de la sphère intérieure. Sa connexion, de première espèce, est donc simple et celle de deuxième espèce du deuxième ordre.

Ces notions posées, voici le théorème que j'ai annoncé :

Soit R_n *un espace fermé à* n *dimensions dont l'ordre de connexion de première espèce est* $p_1 + 1$; *soient* $s_1, s_2, \ldots, s_{p_1}$ *les* p_1 *sections transverses simplement connexes à* $(n-1)$ *dimensions, qui réduisent à être simple sa connexion de première espèce; soient* $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_{p_1}$ p_1 *lignes fermées qui traversent respectivement les sections* $s_1, s_2, \ldots s_{p_1}$, *et telles que chaque ligne fermée* l, *jointe à celles des lignes* L *qui rencontrent les mêmes sections qu'elle, forme le contour d'un espace* C_2 *à deux dimensions entièrement contenu en* R_n; *soient encore* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n *fonctions des points* $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *de l'espace* R_n *finies et continues dans tout* R_n, *qui satisfassent aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *équations*

$$\frac{dX_r}{dz_t} - \frac{dX_t}{dz_r} = 0,$$

l'intégrale

$$\int \Sigma X_r \, dz_r, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

étendue à toutes les lignes $l, L_1, L_2, \ldots, L_{p_1}$ *qui forment le contour de* C_2, *est toujours nulle, quelle que soit la ligne fermée* l [*].

On en déduit :

1° Si l'espace R_n à n dimensions a une connexion simple de première espèce (comme l'espace ordinaire, l'espace compris entre deux sphères concentriques), l'intégrale

$$\int \Sigma X_r \, dz,$$

étendue à deux lignes qui aboutissent au même point z_1 et partent du même point z_0, a la même valeur. Ces deux lignes, en effet, prises ensemble, forment une ligne fermée, contour d'un espace à deux dimensions contenu dans R_n. L'intégrale est donc, dans ce cas, indépendante de la ligne selon laquelle elle va de z_0 à z_1; et, si l'on tient fixe le point z_0, elle peut être regardée comme *fonction monodrome* de $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

2° Si R_n a sa connexion de première espèce de l'ordre $(p_1 + 1)$, si $L_1, L_2, \ldots, L_{p_1}$ sont p_1 lignes fermées qui ne forment pas seules le contour d'un espace à deux dimensions contenues dans R_n, et si $s_1, s_2, \ldots,$

[*] La démonstration de ce théorème est dans le Mémoire cité de M. Betti.

s_p sont p_1 sections transverses à $(n-1)$ dimensions, qui réduisent à devenir simple la connexion de première espèce de R_n, une ligne fermée l formera un contour avec celles des lignes L qui rencontrent les mêmes sections qu'elle. On aura donc, en posant

$$H_t = \int_{L_t} \Sigma X_r \, dz_r, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

$$\int_l \Sigma X_r \, dz_r + \Sigma H_t = 0,$$

où la deuxième somme doit être étendue à toutes les valeurs de t, qui sont *indices* des sections transverses de $(n-1)$ dimensions rencontrées par la ligne l. Par conséquent l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \Sigma X_r \, dz_r,$$

étendue entre deux points z_0 et z_1 de R_n sur une ligne qui traverse s sections transverses, différera de l'intégrale étendue sur une ligne qui ne rencontre aucune section des quantités H relatives aux sections rencontrées.

Le théorème précédent, limité à trois variables, est d'une haute importance dans quelques problèmes de Mécanique et de Physique mathématique. M. Betti l'a bien fait ressortir dans ses Leçons de Physique mathématique données aux élèves de l'Université de Pise en 1872.

On sait que, si un point se meut dans l'espace sous l'action d'une force dont l'intensité dépend seulement de la position du point, en désignant par v_0 la vitesse du point dans la position (x_0, y_0, z_0), et par v sa vitesse dans la position (x, y, z), par m sa masse et par x, y, z les composantes de la force selon les axes, on a

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Si la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la ligne suivie par le point mobile, mais seulement des points initial et final du mouvement, le *principe de la conservation de la force* est vérifié, et il en résulte que, quel que soit le chemin parcouru par le point de la position initiale à la finale, le travail effectué par la force reste toujours le même. On pose, en général, comme condition suffisante la condition que $(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ soit une *différentielle exacte*, c'est-à-dire que les fonctions X, Y, Z satisfassent aux trois équations de condition

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}, \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz};$$

mais les considérations exposées et le théorème énoncé nous démontrent que cette condition n'est point suffisante, et que le trinôme $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ peut être une différentielle exacte sans que pourtant le principe de la conservation de la force soit vérifié. Les fonctions X, Y, Z, que représentent les composantes de forces émanant soit de points, soit de lignes, soit de surfaces, soit de solides, deviennent bien souvent (si elles agissent selon la loi de Newton), ou elles-mêmes, ou leurs dérivées, infinies ou discontinues dans ces points, lignes, surfaces ou solides. Donc elles et leurs dérivées ne se conservent finies et continues que dans l'espace qu'on obtient en excluant ces points, lignes, surfaces ou solides. Si cet espace a une connexion simple de première espèce, l'intégrale $\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ aura une valeur *indépendante du chemin parcouru par le point et fonction seulement des coordonnées extrêmes*. Si, au contraire, cet espace a pour ordre de connexion de première espèce $(p_1 + 1)$ les valeurs de l'intégrale, *bien que* $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ *soit une différentielle exacte dans tout cet espace*, prise entre les mêmes limites, *pourront être différentes les unes des autres des multiples de* p_1 *quantités constantes, selon le chemin suivi*. Dans ce cas donc, quoique les équations de condition soient vérifiées dans le nouvel espace, le principe de la conservation de la force ne l'est pas, et si deux points sont donnés comme points initial et final, et que l'on imagine différentes courbes entre ces deux points, sur lesquelles le point doive se mouvoir, pour chacun de ces chemins on obtiendra une valeur déterminée du travail, mais les valeurs correspondant aux différents chemins pourront être très-différentes entre elles; le point mobile pourra, partant d'une même position initiale, arriver à une autre position avec une force vive différente, selon le chemin parcouru.

LETTRE A M. RESAL;

PAR M. DARBOUX.

Dans la lettre qu'il vient de vous écrire, M. Heine attribue à M. Laurent la formule

$$\frac{n+1}{z-x}(Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}) = \Sigma(2n+1)Z_n X_n.$$

La vérité est que cette formule est une simple application de celle que j'ai donnée pour toutes les fonctions formant une suite de Sturm et qui forme le point de départ de mon Mémoire sur le théorème de Sturm (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. VIII, p. 59). Le procédé par lequel M. Laurent obtient la démonstration de l'équation particulière, relative aux fonctions X_n, est identique à celui que j'ai appliqué au cas général. Tous ceux qui connaissent M. Laurent ne douteront pas qu'il ne m'eût loyalement cité s'il eût pris connaissance de mon travail.

J'ajouterai que, pour le cas particulier des fonctions X_n, la formule se trouve déjà dans le beau Mémoire de M. Christoffel sur la méthode des quadratures mécaniques (*Journal de Crelle*, t. 55, p. 73).

Veuillez agréer, etc.

Méthodes de transformation fondées sur la conservation d'une relation invariable entre les dérivées de même ordre;

Par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

§ I.

1. Désignons par x une variable indépendante et par y une fonction de cette variable qui devra rester ici absolument quelconque. Soient, de même, X une nouvelle variable indépendante destinée à remplacer la première et Y la fonction correspondante. Les quantités x et y sont, bien entendu, reliées, d'une manière déterminée, à X et Y, quelle que soit la fonction y, et l'on demande s'il est possible d'établir cette liaison de telle sorte que la dérivée y' de y, par rapport à x, s'exprime uniquement en fonction de Y', dérivée de Y relative à X, sans qu'il y paraisse aucune des deux quantités X et Y; et cela, quelle que soit la relation sous-entendue de y à x.

Nous verrons bientôt quel intérêt se rattache à ce problème au point de vue des transformations géométriques. Nous étendrons également la même recherche aux dérivées d'un ordre quelconque $y^{(k)}$ et $Y^{(k)}$. Mais il est essentiel de traiter d'abord le premier ordre, attendu qu'il constitue une exception qui ne rentrera pas dans la règle générale.

2. On a identiquement, en changeant de variable indépendante,

$$(1) \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial X} + \dfrac{\partial y}{\partial Y} Y'}{\dfrac{\partial x}{\partial X} + \dfrac{\partial x}{\partial Y} Y'}.$$

Puisqu'on veut que cette expression soit indépendante de X et de Y, quel que soit Y', ce caractère doit s'observer en particulier pour $Y' = 0$, c'est-à-dire lorsque l'équation sous-entendue qui relie Y à X représente, en coordonnées rectangulaires, une droite horizontale. Il vient par là

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial X}}{\frac{\partial x}{\partial X}} = \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial x}{\partial X} = Au, \quad \frac{\partial y}{\partial X} = Bu,$$

en désignant par A et B des constantes et par u une fonction inconnue de X et de Y. On aurait également, en envisageant une droite verticale,

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = A_1 u_1, \quad \frac{\partial y}{\partial Y} = B_1 u_1.$$

Le caractère d'intégrabilité des fonctions x et y exige d'ailleurs que l'on ait

$$A \frac{\partial u}{\partial Y} = A_1 \frac{\partial u_1}{\partial X},$$

$$B \frac{\partial u}{\partial Y} = B_1 \frac{\partial u_1}{\partial X}.$$

Si nous supposons, en premier lieu, que $\frac{\partial u}{\partial Y}$ et $\frac{\partial u_1}{\partial X}$ ne soient pas nuls, on déduira de là

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1},$$

c'est-à-dire

$$A = BC, \quad A_1 = B_1 C,$$

et

$$\frac{\partial x}{\partial X} = C \frac{\partial y}{\partial X}, \quad \frac{\partial x}{\partial Y} = C \frac{\partial y}{\partial Y},$$

ou enfin

$$x = Cy + D.$$

On obtiendrait donc par là une relation déterminée entre x et y, ce qui est contraire à l'énoncé de la question.

Dès lors, nous sommes réduits à supposer

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial X} = 0,$$

d'ou

$$u = \varphi(X), \quad u_1 = \psi(Y),$$

et, par suite,

$$y' = \frac{B\varphi(X) + B_1\psi(Y)Y'}{A\varphi(X) + A_1\psi(Y)Y'}.$$

Nous pouvons maintenant résoudre inversement cette équation sous la forme

$$Y' = -\frac{Ay' - B}{A_1 y' - B_1}\frac{\varphi(X)}{\psi(Y)}.$$

Or, si véritablement y' peut s'exprimer en Y' seul, il en doit être évidemment de même de Y' en fonction de y'. Il faut donc que la fraction

$$\frac{\varphi(X)}{\psi(Y)}$$

soit indépendante de X et de Y et, pour cela, que φ le soit de X et ψ de Y. On aura, par conséquent, en appelant H et K deux constantes,

$$u = H, \quad u_1 = K,$$

ou, avec de nouvelles arbitraires m, n, M, N,

$$\frac{\partial x}{\partial X} = AH = M, \quad \frac{\partial x}{\partial Y} = A_1 K = N.$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = BH = m, \quad \frac{\partial y}{\partial Y} = B_1 K = n,$$

et, en intégrant,

$$(2)\qquad \begin{cases} x = MX + NY + P, \\ y = mX + nY + p. \end{cases}$$

Ces formules renferment donc la solution *nécessaire* de la question. Il est du reste facile de constater qu'elle est en même temps *suffisante* sans nouvelles restrictions entre ses six constantes. Elle donne, en effet,

$$y' = \frac{m + nY'}{M + NY'}, \tag{3}$$

quelle que soit la relation qui unit y à x, et celle qui en découle entre Y et X.

3. On peut reconnaître, par quelques applications, l'intérêt qui s'attache à la recherche précédente.

Si la variable x représente l'angle de contingence d'une courbe, ordinairement désigné par ω, et y la longueur s de l'arc, $\frac{dy}{dx}$ sera le rayon de courbure r. Une ligne quelconque peut toujours être représentée par une relation déterminée entre s et ω, et l'on sait même que ce mode de représentation, dû à Euler, est l'un des plus utiles pour l'étude des courbes planes.

Le problème précédent revient alors à déterminer le type le plus général des méthodes de transformation fondées sur l'emploi de ces variables qui permettront d'établir une relation fixe entre les courbures de la proposée et de sa transformée aux points correspondants, quelle que soit la ligne à laquelle on applique ce procédé de déformation.

Nous venons, d'une part, de reconnaître que l'on ne doit pas songer à imposer ainsi aucune autre relation que celles qui rentreront dans le type (3)

$$r = \frac{m + nR}{M + NR},$$

et que la transformation la plus générale qui amènera ce résultat est la suivante (2) :

$$s = m\Omega + nS + p,$$
$$\omega = M\Omega + NS + P.$$

La présence de ces six constantes arbitraires, ou au moins des quatre premières, m, n, M, N, permet d'ailleurs de comprendre dans ce problème un grand nombre de questions particulières, parmi lesquelles je me borne à citer comme exemples les suivantes :

1° Transformation telle, que les deux courbures soient proportionnelles :

$$s = n\mathrm{S} + p,$$
$$\omega = \mathrm{M}\Omega + \mathrm{P},$$

d'où

$$\frac{1}{r} = \frac{\mathrm{M}}{n}\,\frac{1}{\mathrm{R}}.$$

2° Transformation telle, que la courbure augmente par cette opération d'une même quantité pour tous les points de toutes les courbes :

$$s = n\mathrm{S} + p,$$
$$\omega = n\Omega + \mathrm{NS} + \mathrm{P},$$

d'où

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{N}}{n}.$$

3° Transformation telle, que le rayon de courbure augmente d'une quantité constante :

$$s = m\Omega + n\mathrm{S} + p,$$
$$\omega = n\Omega + \mathrm{P},$$

d'où

$$r = \mathrm{R} + \frac{m}{n}.$$

4° Transformation telle, que les deux rayons de courbure varient en raison inverse :

$$s = m\Omega + p,$$
$$\omega = \mathrm{NS} + \mathrm{P},$$

d'où

$$r\mathrm{R} = \frac{m}{\mathrm{N}},$$

et ainsi de suite.

4. On peut également trouver des applications dans les systèmes

ordinaires de coordonnées. Je me bornerai à l'exemple des coordonnées polaires r et θ. On sait que $\frac{dr}{d\theta}$ y représente la sous-normale λ. Le type général de la relation que l'on peut établir entre les deux sous-normales λ et Λ, ainsi que celui de la transformation qui y conduit, continuent à se trouver dans les formules (3) et (2).

Si, par exemple, on demande qu'il y ait, entre les deux sous-normales, une relation linéaire, il suffira de prendre

$$r = m\Theta + n\mathrm{R} + p,$$
$$\theta = \mathrm{M}\Theta + \mathrm{P},$$

d'ou

$$\lambda = \frac{n}{\mathrm{M}}\Lambda + \frac{m}{\mathrm{M}}.$$

Si, en particulier, on fait $\mathrm{M} = n$, la sous-normale augmente d'une quantité constante.

Pour $m = 0$, les deux sous-normales restent proportionnelles. En ajoutant à cette hypothèse la suivante, $n = \mathrm{M}$, la sous-normale ne change pas. Entre autres cas particuliers de cette solution, pour $n = 1$, $\mathrm{M} = 1$, $m = 0$, on obtient la transformation *conchoïdale,* qui, comme on le sait, jouit en effet de cette propriété. On voit, d'ailleurs, que le type le plus étendu des transformations qui conservent la sous-normale revient à la combinaison des suivantes : 1° l'*homothétie* avec un rapport de similitude M; 2° la *dilatation* de tous les azimuts dans le même rapport M (opération connue pour la transformation des engrenages de roulement); 3° une *rotation* égale à P; 4° la transformation *conchoïdale* avec le paramètre p.

5. Cherchons de même, en Cinématique, s'il est possible d'établir, entre les positions de deux mobiles sur leurs trajectoires et les instants correspondants, des relations invariables telles que, quelle que soit la loi des mouvements, il existe une condition fixe entre leurs deux vitesses. Il suffira que x représente le temps t et y l'arc s de la trajectoire.

Nous reconnaissons d'abord qu'il ne peut exister, entre les vitesses, de relation plus générale que la suivante (3) :

$$v = \frac{m + nV}{M + NV},$$

et qu'on l'obtiendra au moyen des formules (2)

$$s = mT + nS + p,$$
$$t = MT + NS + P.$$

Si, par exemple, on demande que la vitesse de tous les mouvements possibles se trouve augmentée d'une même quantité, on prendra

$$s = mT + nS + p,$$
$$t = nT + P,$$

ce qui donne

$$v = V + \frac{m}{n}.$$

Je ne m'arrêterai pas à multiplier davantage les applications.

§ II.

6. Avant d'aborder le cas général, il est encore à peu près nécessaire d'envisager directement le second ordre. Nous chercherons donc à faire en sorte qu'il existe, entre $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ et $Y'' = \frac{d^2Y}{dX^2}$, une relation fixe, indépendante de celles qui unissent y à x et Y à X.

La formule du changement de variables, relative à ce cas, s'obtient en différentiant la relation (1) par rapport à X. Il vient ainsi, dans le premier membre, $y'' \frac{dx}{dX}$. Dans le second, le dénominateur se trouve porté au carré. Comme d'ailleurs il ne diffère pas de $\frac{dx}{dX}$, nous pouvons écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & y''\left(\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y}Y'\right)^3 \\ & \quad = \left(\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y}Y'\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial X\partial Y}Y' + \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2}Y'^2 + \frac{\partial y}{\partial Y}Y''\right) \\ & \quad - \left(\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y}Y'\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 x}{\partial X\partial Y}Y' + \frac{\partial^2 x}{\partial Y^2}Y'^2 + \frac{\partial x}{\partial Y}Y''\right). \end{aligned}\right.$$

On voit clairement que, Y'' ne figurant pas dans le coefficient de y'', la relation entre ces deux dérivées ne peut être que linéaire. Comme du reste on exige que les coefficients ne renferment aucune des quantités X, Y, Y', la forme cherchée sera nécessairement

$$y'' = AY'' + B, \tag{5}$$

en désignant par A et B deux constantes.

7. Lorsqu'on effectue les réductions, on reconnaît facilement que Y' disparaît du coefficient de Y'' dans le second membre. Il doit donc également s'évanouir dans celui de y'', qui passe en dénominateur; d'où la condition

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = 0,$$

exigeant que x ne dépende que de X, à l'inverse de ce que nous avions trouvé pour le premier ordre (2).

Le coefficient de Y'' se réduit alors à

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial Y}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial X}\right)^2},$$

et, puisqu'il doit être égal à A, il s'ensuit

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = A\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2. \tag{6}$$

Le coefficient de Y' devient, de son côté,

$$2\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 x}{\partial X^2},$$

et, comme il doit disparaître de lui-même, nous devons poser

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial X^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial X}} = 2\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial X\,\partial Y}}{\dfrac{\partial y}{\partial Y}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\log\frac{\partial x}{\partial X}\right) = 2\frac{\partial}{\partial X}\left(\log\frac{\partial y}{\partial Y}\right),$$

et en intégrant

$$\log\frac{\partial x}{\partial X} = 2\log\frac{\partial y}{\partial Y} + \log f(Y),$$

expression dans laquelle f désigne une fonction arbitraire de Y seul. Il vient par là

$$\frac{\partial x}{\partial X} = f(Y)\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2,$$

ou, d'après (6),

$$1 = A^2 f(Y)\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^3.$$

Mais d'ailleurs on a reconnu que $\frac{\partial x}{\partial X}$ ne doit pas contenir Y. Il faut donc que $f(Y)$ se réduise à une constante, et il en sera par suite de même pour $\frac{\partial x}{\partial X}$. Il vient ainsi, pour l'expression définitive de x,

$$x = MX + P. \tag{7}$$

En substituant cette expression dans la relation (6), on obtient

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = AM^2,$$

valeur arbitraire que nous pouvons représenter plus simplement par n, ce qui donne

$$y = nY + F(X). \tag{8}$$

En troisième lieu, le terme indépendant de Y′ et Y″, dans la formule (4), est le suivant :

$$\frac{\frac{dx}{dX}\frac{\partial^2 y}{\partial X^2} - \frac{\partial y}{\partial X}\frac{d^2 x}{dX^2}}{\left(\frac{dx}{dX}\right)^3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{F''(X)}{M^2}.$$

Or il doit être constant et égal à B, par suite

$$F(X) = \tfrac{1}{2}M^2BX^2 + mX + p.$$

Mais B reste arbitraire, et il sera plus simple d'écrire (8)

$$y = lX^2 + mX + nY + p. \tag{9}$$

Les formules (7) et (9) résolvent la question. En effet, bien que nous n'ayons pas encore épuisé l'identification, nous pouvons constater que ces expressions satisfont à l'énoncé de la question sans nouvelle restriction entre leurs six arbitraires. Elles donnent, en effet,

$$\begin{aligned}
dy &= (2lX + m)\,dX + n\,dY,\\
dx &= M\,dX,\\
y' &= \frac{n}{M}Y' + \frac{2l}{M}X + \frac{m}{M},\\
y''\frac{dx}{dX} &= \frac{n}{M}Y'' + \frac{2l}{M},\\
y'' &= \frac{n}{M^2}Y'' + \frac{2l}{M^2}.
\end{aligned}$$

8. Cherchons, par exemple, à établir entre les positions de deux mobiles sur leurs trajectoires et les instants correspondants de telles relations fixes que, quelle que soit la loi des deux mouvements, il y ait, entre leurs accélérations tangentielles, une condition invariable.

Nous reconnaissons d'abord qu'il ne peut exister entre ces accélérations j et J qu'une relation linéaire, à l'inverse de ce que nous avions trouvé pour le problème analogue concernant la vitesse (5). Les relations qui la procureront seront en outre les suivantes :

$$\begin{aligned}
t &= MT + P,\\
s &= lT^2 + mT + nS + p,
\end{aligned}$$

d'où

$$j = \frac{n}{M^2}J + \frac{2l}{M^2}.$$

§ III.

9. Nous pouvons maintenant généraliser la recherche précédente et nous proposer de créer, entre les dérivées $y^{(k)}$ et $Y^{(k)}$ d'un ordre quelconque, mais déterminé k, une relation fixe, indépendante de celles qui unissent y et Y à leurs variables respectives x et X.

Pour obtenir les dérivées successives y''', y^{IV}, .., $y^{(k)}$, il suffira de différentier un certain nombre de fois, par rapport à X, la valeur de y'', en ayant soin de chasser du premier membre le coefficient $\frac{\partial x}{\partial X}$, qui s'y réintroduit à chaque différentiation. Le dénominateur sera donc exclusivement formé de puissances de la quantité

$$\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y} Y',$$

et l'on reconnaîtra, comme ci-dessus (6), que la relation cherchée ne peut être que linéaire sous la forme

$$y^{(k)} = AY^{(k)} + B. \tag{10}$$

Si le premier ordre a fait exception à cette règle générale, en admettant un type fractionnaire (3), il est facile de voir que cela tient à ce que le raisonnement employé se trouve alors en défaut, parce que $Y^{(k)}$ se confond avec Y'.

10. Si nous chassons le dénominateur après la fin des différentiations, le premier membre de l'égalité (10) deviendra

$$\left[AY^{(k)} + B\right] \left(\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Y} Y'\right)^h,$$

et devra se trouver identiquement égal au numérateur. Développons cette identification.

Le coefficient de $Y^{(k)}$ contient, dans le premier membre,

$$A \left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^h Y'^h.$$

Au contraire, dans le second, il sera toujours, par rapport à Y', d'un degré inférieur, comme nous allons le reconnaître. En effet, si nous représentons en abrégé par Z la quantité $\frac{dx}{dX}$, $y^{(k)}$ aura la forme

$$y^{(k)} = \frac{U + VY^{(k)}}{Z^h},$$

U et V étant des fonctions de $X, Y, Y', Y'', \ldots, Y^{(k-1)}$. On en tire, en différentiant par rapport à X,

$$y^{(k+1)}Z = \frac{Z^h[U_1 + VY^{(k+1)}] - [U + VY^{(k)}]hZ^{h-1}\frac{dZ}{dX}}{Z^{2h}};$$

d'où, en réduisant,

$$y^{(k+1)} = \frac{U_2 + VZY^{(k+1)}}{Z^{h+2}}.$$

Le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé et le dénominateur forment donc deux progressions géométriques dont les raisons sont respectivement Z et Z^2. Donc l'exposant de Y' qui entre à la première puissance dans Z croît plus rapidement au dénominateur que dans le coefficient en question. Il est d'ailleurs déjà supérieur dès le second ordre (4), et par suite l'inégalité se conservera toujours dans le même sens.

D'après cela, le terme en Y'^h doit disparaître de lui-même, et, comme A ne peut s'annuler, nous sommes forcés de poser

$$(11) \qquad \frac{\partial x}{\partial Y} = 0, \quad x = f(X).$$

Le coefficient de $Y^{(k)}$, dans le premier membre, se réduit par là de la manière suivante :

$$A[f'(X)]^{2k-1}.$$

En effet, la valeur de h devient en effet $2k-1$ pour $k=2$ (4), et nous venons de voir qu'elle s'accroît de deux unités pour chaque unité d'augmentation de k. De même le coefficient de $Y^{(k)}$, dans le second membre, a pour valeur

$$\frac{\partial y}{\partial Y}[f'(X)]^{k-1}.$$

En effet, pour $k=2$, il se réduit (4) à $f'(X)\frac{\partial y}{\partial Y}$, et nous venons de voir qu'il se multiplie par $f'(X)$ pour chaque unité d'augmentation de k. Dès lors, l'identification de ces deux coefficients exige que l'on pose

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = A[f'(X)]^k,$$

en n'oubliant pas que k a, dans la question, une valeur bien déterminée. On en déduit

$$(12) \qquad y = AY[f'(X)]^k + F(X).$$

11. Pour déterminer la fonction inconnue f, effectuons sur cette dernière formule des différentiations successives, en mettant en évidence les deux dérivées de Y d'ordre le plus élevé

$$\frac{1}{A}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dX} = [f'(X)]^k \frac{dY}{dX} + k[f'(X)]^{k-1}f''(X)Y + \ldots.$$

$$\frac{y'}{A} = [f'(X)]^{k-1}Y' + k[f'(X)]^{k-2}f''(X)Y + \ldots,$$

$$\frac{1}{A}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dX} = [f'(X)]^{k-1}\frac{dY'}{dX} + [(k-1)+k][f'(X)]^{k-2}f''(X)\frac{dY}{dX} + \cdots,$$

$$\frac{y''}{A} = [f'(X)]^{k-2}Y'' + (2k-1)[f'(X)]^{k-3}f''(X)Y' + \ldots,$$

$$\frac{1}{A}\frac{dy''}{dx}\frac{dx}{dX} = [f'(X)]^{k-2}\frac{dY''}{dX} + [(k-2)+(2k-1)][f'(X)^{k-3}f''(X)\frac{dY'}{dX} + \cdots,$$

$$\frac{y'''}{A} = [f'(X)]^{k-3}Y''' + [3k-(1+2)][f'(X)]^{k-4}f''(X)Y'' + \ldots,$$

et généralement

$$\begin{aligned}\frac{y^{(i)}}{A} &= [f'(X)]^{k-i}Y^{(i)} \\ &\quad + \{ik - [1+2+\ldots+(i-1)]\}[f'(X)]^{k-i-1}f''(X)Y^{(i-1)} + \ldots \\ &= [f'(X)]^{k-i}Y^{(i)} + \left[ik - \frac{i(i-1)}{2}\right][f'(X)]^{k-i-1}f''(X)Y^{(i-1)} + \ldots.\end{aligned}$$

On a donc en particulier, pour $i=k$,

$$\frac{y^{(k)}}{A} = Y^{(k)} + \frac{k(k+1)}{2}Y^{(k-1)}\frac{f''(X)}{f'(X)} + \cdots.$$

Or il faut que cette expression soit identique à (10). Le terme en $Y^{(k-1)}$ en doit donc disparaître de lui-même, ce qui exige que l'on pose

$$f''(X) = 0,$$
$$f(X) = MX + P.$$

Les relations (11) et (12) deviennent, d'après cela,

$$x = MX + P, \tag{13}$$
$$y = AM^kY + F(X), \tag{14}$$

et il ne reste qu'à déterminer $F(X)$.

12. Considérons, à cet effet, dans $y^{(k)}$, le terme indépendant de Y. Pour l'obtenir dans cette dernière formule (14), il faut différentier k fois par rapport à X, ce qui se fera en différentiant autant de fois le premier membre relativement à x et le multipliant chaque fois par M, qui représente $\frac{dx}{dX}$ (13). Il vient ainsi

$$y^{(k)} = \frac{F^{(k)}(X)}{M^k} + \ldots.$$

D'ailleurs cette partie doit être constante et égale à B (10). Il s'ensuit donc

$$F^{(k)}(X) = M^kB,$$

et, en intégrant k fois,

$$F(X) = \frac{M^kB}{1.2.3\ldots k}X^k + m_{k-1}X^{k-1} + m_{k-2}X^{k-2} + \ldots + m_1X + m_0.$$

Mais, comme B est arbitraire, nous pouvons plus simplement remplacer le premier coefficient par m, et en reportant cette valeur dans celle (14) de y, écrire ainsi cette dernière

$$y = nY + m_0 + m_1X + m_2X^2 + \ldots + m_{k-1}X^{k-1} + m_kX^k. \tag{15}$$

13. Les formules (13) et (15) représentent la forme nécessaire de la solution. Il est bien vrai que nous sommes encore loin d'avoir épuisé l'identification, mais nous pouvons, dès à présent, constater que les conditions exprimées sont suffisantes en même temps que nécessaires.

On a en effet (13)

$$\frac{dx}{dX} = M,$$

et, par suite, en différentiant k fois par rapport à X (15),

$$(16) \qquad y^{(k)} = \frac{n}{M^k} Y^{(k)} + k(k-1)(k-2)\ldots 3.2.1.\frac{m_k}{M^k},$$

expression qui rentre effectivement dans le type voulu (10).

De là ce théorème :

Pour établir une relation fixe entre l'ancienne et la nouvelle dérivée d'ordre k, il faut et il suffit que l'ancienne variable indépendante soit fonction linéaire de la nouvelle, et que l'ancienne variable-fonction soit la somme d'une fonction linéaire de la nouvelle et d'un polynôme de degré k formé avec la nouvelle variable indépendante.

La relation fixe est alors nécessairement linéaire entre les deux dérivées d'ordre k. En outre, elle entraîne, comme conséquence, que les dérivées d'ordre supérieur resteront proportionnelles et que les coefficients de proportionnalité formeront une progression géométrique.

L'équation (16) donne en effet, en la différentiant j fois par rapport à X,

$$y^{(k+j)} = \frac{n}{M^{k+j}} Y^{(k+j)}.$$

14. Proposons-nous, comme application, de déterminer la transformation par suite de laquelle la développée d'ordre k d'une courbe quelconque, et celle de sa transformée, auront des courbures égales en deux points corespondants, quels qu'ils soient.

Il suffira pour cela, en recourant aux variables d'Euler, de poser

$$\omega = M\Omega + P,$$

$$s = M^k S + m_0 + m_1\Omega + m_2\Omega^2 + \ldots + m_{k-1}\Omega^{k-1};$$

on en déduit en effet

$$\frac{d^k s}{d\omega^k} = \frac{d^k S}{d\Omega^k},$$

c'est-à-dire l'égalité des rayons de courbure des $k^{ièmes}$ développées.

Si, par exemple, on réduit en particulier cette transformation à la forme plus simple

$$\omega = M\Omega, \quad s = M^k S,$$

et qu'on l'applique à la cycloïde

$$s = a \sin \omega,$$

on obtient l'épicycloïde

$$S = \frac{a}{M^k} \sin M\Omega, \tag{17}$$

dont les sommets et les rebroussements se correspondent avec ceux de la cycloïde proposée. Celle-ci, qui est identique à toutes ses développées, et l'épicycloïde fournie par la $k^{ième}$ développée de sa transformée (17), auront la même courbure dans tous les points dont la correspondance est marquée par la relation

$$\omega = M\Omega.$$

Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace;

PAR M. HALPHEN.

1. Dans un grand nombre de questions géométriques, s'offrent des cas particuliers du problème suivant :

Étudier, sur une courbe algébrique plane, les points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique donnée.

Il est immédiatement visible que ces points sont les intersections de la courbe considérée $S = 0$ avec une autre courbe algébrique $\Phi = 0$. L'équation de cette dernière s'obtient, en effet, en substituant, dans l'équation différentielle, aux dérivées, leurs expressions déduites de l'équation $S = 0$. La formation de l'équation $\Phi = 0$, si simple en théorie, présente, dans la plupart des applications, une complication très-grande. Si elle est nécessaire pour une étude approfondie, elle peut, du moins, être évitée pour certains cas de la question générale. C'est ce que je me propose de montrer ici pour les deux problèmes suivants :

1° *Trouver le degré de la courbe* Φ;

2° *Trouver le nombre des points, en tenant compte des singularités de la courbe* S.

La solution de ces deux problèmes fera l'objet du § I. Le § II sera consacré à des applications. Dans le § III, j'étendrai la solution du premier problème à l'espace. On verra, dans ce paragraphe, le problème résolu immédiatement et, pour ainsi dire, à vue dans un cas particulièrement intéressant, celui où l'équation différentielle ou aux dérivées partielles envisagée jouit de la propriété de *rester inaltérée par toute transformation homographique*. L'étude directe de telles équations, considérées en elles-mêmes, offre un sujet de recherches dont quelques points sont abordés dans le présent Mémoire. On rencontrera notamment, au § II, les deux propositions suivantes :

A l'exception de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, *il n'existe aucune équation différentielle algébrique du second ordre qui reste inaltérée par toute transformation homographique.*

Il n'existe aucune équation différentielle algébrique du troisième ordre qui reste inaltérée par toute transformation homographique.

§ I.

2. Si, de l'équation $S(x, y) = 0$, on tire les expressions des dérivées successives de y par rapport à x, on démontre aisément que chacune d'elles a pour numérateur une fonction entière des dérivées partielles de S, et pour dénominateur une puissance de $\frac{\partial S}{\partial y}$. Pour la dérivée d'ordre n, l'exposant de cette puissance est $(2n-1)$; c'est ce qu'on peut exprimer en disant que :

Les variables x, y étant liées par l'équation $S(x, y) = 0$, *la quantité* $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{2n-1} \frac{d^n y}{dx^n}$ *est égale à une fonction entière des dérivées partielles de* S.

Soit $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ une équation différentielle, *entière* par rapport à tous les arguments de f. J'y considère x et y comme du degré zéro, $\frac{dy}{dx}$ comme du premier degré, ..., $\frac{d^n y}{dx^n}$ comme du degré $(2n-1)$. Soit, à ce point de vue, k le degré de f. D'après le lemme, pour les valeurs de x et y qui satisfont à $S(x, y) = 0$, la quantité $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^k f$ est égale à une fonction entière des dérivées partielles de S.

Pour éviter toute confusion, j'indique par le symbole des congruences les égalités qui ont lieu ainsi en vertu de $S = 0$. D'après cette convention, je puis dire que :

Théorème I. — *Si* $S(x, y)$ *est un polynôme entier, il existe des exposants* k *et des fonctions entières* $\psi(x, y)$ *qui vérifient la relation*

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^k f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \equiv \psi(x, y), \tag{1}$$

f *étant une fonction entière.*

Nous sommes en possession d'un procédé pour calculer une valeur de k; mais il nous faut obtenir une règle pour calculer sa valeur *minima*.

3. Par $S(x, y)$, il faut actuellement entendre un polynôme entier, de forme générale dans son degré, et à coefficients indéterminés. Cela étant, soit ω un point satisfaisant à $S = 0$, $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$. Si la courbe $\psi = 0$ passe en ω, on a identiquement

$$\psi(x, y) = LS + P\frac{\partial S}{\partial y}, \tag{2}$$

L et P étant des polynômes entiers en x et y. Car, en vertu de l'indétermination des coefficients du polynôme S, si la courbe ψ passe en ω, elle passe aussi en tous les points analogues, la résultante en x des équations $S = 0$, $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$ étant irréductible. Et, en outre, tous ces points étant des points simples d'intersection des courbes représentées par ces équations, l'équation (2) a lieu. D'après la convention ci-dessus, elle peut s'écrire

$$\psi(x, y) \equiv P\frac{\partial S}{\partial y}.$$

Il peut arriver que la courbe $P = 0$ passe encore en ω. On répétera le même raisonnement, et l'on parviendra à une relation telle que

$$\psi(x, y) = \vartheta\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^q,$$

où ϑ est un polynôme entier en x et y, tel que la courbe $\vartheta = 0$ ne passe pas en ω. Alors la relation (1) devient

$$\text{(3)} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{k-q} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \vartheta(x, y).$$

Ainsi, dès que la courbe ψ passe en un point tel que ω, c'est-à-dire en un point où la tangente de S est parallèle à l'axe des y, l'exposant k peut être abaissé, et cela de telle sorte que la courbe ϑ, qui remplace ψ, ne passe pas en ω. L'exposant k ne peut être abaissé davantage. Soit pris, en effet, sur S, un point infiniment voisin de ω, et dont x, y soient les coordonnées. Le polynôme ϑ a une limite finie, et, par suite, aussi le premier membre de (3). Mais $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infiniment petit. Donc le produit du premier membre de (3) par une puissance négative de $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infini. Donc ce produit ne peut être égal à la valeur acquise au point ω par un polynôme entier. Donc :

Théorème II. — *La valeur minima de l'exposant k* (mentionné au théorème I) *est celle qui fait acquérir au premier membre de la relation* (1) *une valeur finie pour les points où la tangente de la courbe* $S = 0$ *est parallèle à l'axe des y.*

4. Je désignerai par la lettre α la valeur minima de k. Le théorème II conduit à un procédé simple pour calculer α. Soient ξ, η les coordonnées de ω. Aux environs de ω, le binôme $(y - \eta)$ est développable en série suivant les puissances entières et positives de $(x - \xi)^{\frac{1}{2}}$, de la manière suivante :

$$\text{(4)} \qquad y = \eta + A(x - \xi)^{\frac{1}{2}} + A'(x - \xi) + A''(x - \xi)^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

On aura, pour la dérivée, le développement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}A(x-\xi)^{-\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Ainsi, $(x-\xi)$ étant supposé infiniment petit du premier ordre, $\frac{dy}{dx}$ est d'ordre $-\frac{1}{2}$. Mais $\frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ a une limite finie, différente de zéro. Donc $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$. Donc $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^\alpha$ est infiniment petit d'ordre $\frac{\alpha}{2}$. Soit maintenant σ l'ordre de la partie principale de $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$, quand on y substitue à y et à ses dérivées le développement (4) et ses dérivées. Il en résulte, pour α, la valeur $\alpha = -2\sigma$.

On doit, bien entendu, pour être d'accord avec l'hypothèse faite sur S, supposer que, dans (4), ξ, η, A, A′, A″,... sont des indéterminées. Cela étant, on verra aisément qu'il en résulte pour σ une valeur négative, et dont le double est un entier. On trouvera donc, pour α, un entier positif, comme cela doit être.

5. Le nombre α, ainsi calculé, vérifie la relation

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^\alpha f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \equiv \theta(x, y),$$

où θ est un polynôme entier. Si la courbe $\theta = 0$ passe en un point de S à l'infini, on voit, en raisonnant comme au n° 3, que θ est de la forme $\Phi + LS$, L et Φ étant des polynômes entiers, et la courbe $\Phi = 0$, de degré moindre que θ, n'ayant plus aucun point commun avec S à l'infini. Par suite, au lieu de (5), on peut écrire

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^\alpha f \equiv \Phi.$$

Il est manifeste que tous les points d'intersection des courbes S et Φ satisfont, sur S, à la condition exprimée par l'équation différentielle $f = 0$, et réciproquement. Par suite, toute courbe plane algébrique qui passe en tous les points de S satisfaisant à cette condition a une équation de la forme $LS + P\Phi = 0$, L et P étant des polynômes entiers. Par suite, si cette courbe est distincte de S et de degré non supérieur à Φ, son équation se réduit à la forme $LS + \Phi = 0$, où le degré de L est égal à la différence de ceux de Φ et de S. On voit donc que le premier des problèmes proposés plus haut (n° 1) consiste à déterminer le degré de la courbe Φ que nous venons de trouver par la relation (6).

Pour trouver ce degré, je cherche celui de la résultante en x des équations $\Phi = 0$, $S = 0$. J'emploie, à cet effet, un procédé d'élimination bien connu. De $S = 0$, je tire les divers développements de y suivant les puissances descendantes de x. Soit m le degré de S. J'aurai m développements procédant suivant les puissances entières de x, commençant chacun par un terme du premier degré. Soit

$$y = Bx + C + \frac{D}{x} + \frac{E}{x^2} + \cdots \tag{7}$$

un de ces développements, dont on doit supposer les coefficients indéterminés, suivant l'hypothèse faite sur S. Pour obtenir la résultante, il faut substituer à y, dans $\Phi(x, y)$, successivement les m développements analogues, et faire le produit des résultats. Le degré de la résultante est la somme des degrés de chacune des valeurs de Φ, c'est-à-dire ici m fois le degré de l'une d'elles.

Ce procédé d'élimination fait disparaître les solutions infinies, s'il y en a. Mais comme, par hypothèse, il n'en existe pas, le degré de la résultante est le produit des degrés de S et de Φ. Donc le degré de Φ est précisément égal au degré de la valeur obtenue pour Φ quand on y substitue à y le développement (7).

Or, par hypothèse, ce développement est tiré de l'équation $S(x, y) = 0$. Donc la valeur (7) de y fait identiquement évanouir S. Donc, au lieu de substituer cette valeur dans Φ, on peut la substituer dans le premier membre de (6) : le résultat sera le même. Soit donc β le degré qu'acquiert f par cette substitution; le degré du premier membre de (6), et par suite le degré de Φ, est

$$M = \alpha(m - 1) + \beta.$$

6. Les résultats des n^{os} 4 et 5 se résument dans l'énoncé suivant :

Théorème III. — *Les points d'une courbe algébrique plane* S, *de degré* m, *qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle entière* $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$, *sont les intersections de* S *avec une autre courbe algébrique, dont le degré est de la forme* $\alpha(m-1)+\beta$, *les coefficients* α *et* β *ne dépendant que de l'équation différentielle. On peut calculer ces coefficients comme il suit :*

1° *Substituez, dans* f, *à* y *un développement suivant les puissances entières et ascendantes de* $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, *commençant par une constante, et dans lequel les coefficients et la constante* ξ *soient indéterminés; et ordonnez le résultat de la substitution suivant les mêmes puissances. L'exposant de* $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, *dans le premier terme, est égal et de signe contraire à* α.

2° *Substituez, dans* f, *à* y *un développement suivant les puissances entières et descendantes de* x, *commençant par un terme du premier degré, et à coefficients indéterminés; et ordonnez le résultat suivant les mêmes puissances. L'exposant de* x, *dans le premier terme, est égal à* β.

7. On peut donner au théorème III une autre forme, moins commode, il est vrai, pour le calcul des coefficients α et β, mais utile cependant dans quelques cas. Cette forme nouvelle se prête d'ailleurs très-bien à une généralisation, comme on le verra dans la dernière partie de ce Mémoire.

Je fais une substitution homographique

$$(8) \qquad x = \frac{ax'+by'+c}{Ax'+By'+C}, \quad y = \frac{a'x'+b'y'+c'}{Ax'+By'+C}.$$

Pour abréger l'écriture, je poserai

$$(9) \quad (Ab-Ba)\left(x'\frac{dy'}{dx'}-y'\right)-(Bc-Cb)\frac{dy'}{dx'}+Ca-Ac = R,$$

$$(10) \qquad Ax'+By'+C = z.$$

On déduit aisément de (8), par les procédés habituels pour le changement des variables, et en désignant par R′ ce que devient R quand on y accentue les lettres a, b, c,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R'}{R}; \tag{11}$$

puis, pour $p \geqq 2$,

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{z^{p+1}}{R^{2p-1}} V, \tag{12}$$

V étant une fonction entière de x', y' et des dérivées de y', jusqu'à l'ordre n, par rapport à la nouvelle variable indépendante x', et qui n'est divisible ni par z ni par R. Je laisse au lecteur le soin de démontrer l'équation (12).

Soit maintenant $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ une équation différentielle *entière*. J'y fais le changement de variables (8). Soit $f'\left(x', y', \frac{dy'}{dx'}, \ldots, \frac{d^n y'}{dx'^n}\right) = 0$ sa transformée, également sous forme entière. D'après les équations (8), (10), (11) et (12), il est manifeste que, pour former f', il n'y a qu'à substituer, dans f, les valeurs de $x, y, \ldots$, fournies par ces équations, et à supprimer un facteur de la forme $\frac{1}{R^\alpha z^\beta}$, α et β étant des entiers dont le premier est positif, et le second positif ou négatif. Or ces nombres α et β sont précisément les mêmes que précédemment, comme je vais le démontrer : c'est en cela que consiste la nouvelle forme du théorème III.

8. En désignant par K une constante, on a, en vertu des équations (8), ainsi que je viens de l'expliquer, une identité de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{K}{R^\alpha z^\beta} f'\left(x', y', \frac{dy'}{dx'}, \ldots, \frac{d^n y'}{dx'^n}\right). \tag{13}$$

J'ai considéré précédemment une courbe S. Soit S′ sa transformée par la substitution (8). Sur S′, je prends un point ω' dans lequel R s'évanouisse. En ce point, f' et z ont des valeurs finies, différentes de zéro. Pour un point m', pris sur S' à distance infiniment petite d'ordre ε du point ω', R est un infiniment petit de ce même ordre. Donc, en m', la partie principale du second membre de (13), et par suite celle de f, est de l'ordre $-\alpha\varepsilon$.

Au point ω' correspond, sur S, un point ω dans lequel la tangente de S est parallèle à l'axe des y; et, au point m', un point m, dont la distance à ω est infiniment petite d'ordre ε. Mais, aux environs de ω, la variation de l'ordonnée des points de S est proportionnelle à la racine carrée de la variation de leur abscisse. Donc, pour m, la variation de l'abscisse est d'ordre 2ε. Elle sera du premier ordre, si l'on suppose $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot$ Ceci étant supposé, la partie principale de f est, au point m, de l'ordre $-\frac{\alpha}{2}\cdot$ Donc ce nombre α est le même qu'au théorème III.

De même, soit Ω' un point de S', dans lequel z s'évanouisse; et soit M' un point, pris sur S' à distance infiniment petite du premier ordre de Ω'. En M', le second membre de (13), et par suite f, est infiniment grand d'ordre β. Mais à Ω' correspond, sur S, un point à l'infini. Donc, aux environs d'un point à l'infini de S, f est du degré β. Donc ce nombre β est le même qu'au théorème III. J'ai donc cette proposition :

Théorème IV. — *Si l'on effectue, sur l'équation différentielle entière $f = 0$, la substitution homographique* (8), *et que $f' = 0$ soit la transformée sous forme entière, on a identiquement, en désignant par* K *une constante, et par* R *et par z les expressions* (9) *et* (10),

$$f = \frac{K}{R^\alpha z^\beta} f'.$$

Les exposants α et β sont des entiers dont le premier est positif, le second positif ou négatif.

Les points d'une courbe algébrique plane S, *de degré m, qui satisfont à la condition exprimée par l'équation $f = 0$, sont les intersections de S et d'une autre courbe algébrique, dont le degré est $\alpha(m-1) + \beta$.*

9. Le premier des deux problèmes posés plus haut (n° **1**) est résolu par le théorème III ou par le théorème IV. Avant de passer au second problème, je veux déduire de l'analyse précédente une conséquence qui sera bientôt utile.

On vient de voir (n° 8) que, si ω est un point de S, dans lequel la tangente soit parallèle à l'axe des y, et m un point de S dont la distance à ω soit infiniment petite du premier ordre (je fais ici $\varepsilon = 1$), la partie principale de f est, au point m, de l'ordre $-\alpha$. Si, au lieu de supposer, comme jusqu'à présent, que S soit un polynôme de forme générale dans son degré, et à coefficients indéterminés, nous le supposons maintenant particularisé, cette assertion peut devenir inexacte. On le voit sur la relation (13); car si, au point ω' qui, sur S', correspond à ω, f' s'évanouit, l'ordre de f, au point m, surpasse $-\alpha$. S'il en est ainsi, la courbe Φ passe en ω. Je vais montrer que cette circonstance particulière peut être écartée au moyen d'une transformation homographique.

Soient, en effet, ω'_1 un point de S' dans lequel la tangente de S' soit parallèle à l'axe des y', et ω_1 le point correspondant sur S. On peut manifestement choisir les constantes de la substitution de telle sorte que tous les points tels que ω_1 soient des points dans lesquels f ait des valeurs finies, différentes de zéro, sauf le cas, que j'écarte naturellement, où l'équation $S = 0$ serait une intégrale de $f = 0$. Les constantes étant ainsi choisies, l'ordre de f', aux environs de ω'_1, est égal à $-\alpha$. Ainsi la circonstance particulière dont il vient d'être question est écartée, si, au lieu de la courbe S et de l'équation $f = 0$, j'envisage la courbe S' et l'équation $f' = 0$.

On verra de même que, par cette transformation, on peut aussi faire en sorte que, pour tous les points à l'infini de la courbe S', le degré de f' soit toujours β, exactement comme dans le cas où S est un polynôme indéterminé. Donc, en résumé, on peut, sans restreindre la généralité, supposer toujours que la courbe Φ ne passe en aucun des points de S à l'infini, ni en aucun de ceux où la tangente de S est parallèle à l'axe des y, sous la condition d'entendre, par la courbe S et par l'équation $f = 0$, des transformées de la courbe et de l'équation proposée au moyen d'une substitution homographique.

10. Les points d'une courbe S qui satisfont à une condition ex-

primée par une équation différentielle $f = 0$ sont, d'après les théorèmes III et IV, les intersections de S et d'une autre courbe algébrique Φ, dont ces propositions nous enseignent à calculer le degré. Le nombre de ces points est donc, en général, égal au produit des degrés des deux courbes. Mais, dans des cas particuliers, quelques-unes des intersections de S et de Φ peuvent se réunir, notamment aux points singuliers de S. C'est dans l'étude de ces circonstances que consiste le second de nos problèmes. La question à résoudre est donc celle-ci : *Trouver le nombre des intersections des courbes* S *et* Φ, *qui sont confondues en un point donné de* S.

Je rappelle d'abord comment ce nombre peut être déterminé pour deux courbes quelconques. Soit O un point (singulier ou non) d'une courbe plane algébrique S. Les branches de la courbe S se répartissent, au point O, en différents systèmes circulaires (S), (S′), (S″),.... Je considère l'un d'eux (S). En désignant par ξ, η les coordonnées de O, je puis représenter (S) par deux équations telles que

$$(14) \qquad x - \xi = t^r, \quad y - \eta = \varphi(t).$$

Dans ces équations, r est un entier positif, et $\varphi(t)$ une fonction synectique pour les petites valeurs de t, s'évanouissant avec cette variable, et qui, en outre, acquiert r valeurs distinctes quand on donne à t successivement les r valeurs qui répondent à une valeur donnée de $(x - \xi)$.

Soit maintenant $\Phi(x, y) = 0$ l'équation *entière* d'une courbe algébrique passant en O. Dans le polynôme entier Φ, je substitue à x et à y les valeurs tirées de (14), et j'ordonne le résultat suivant les puissances ascendantes de t. Soit n le degré de t au premier terme.

Je considère de même les autres systèmes circulaires (S′), (S″),..., et soient n', n'',.... les nombres analogues à n, et qui leur sont relatifs.

Le nombre des intersections de S *et de* Φ, *confondues en* O, *est*

$$n + n' + n'' + \ldots.$$

Pour appliquer ce procédé de calcul au cas actuel, j'observe que, par hypothèse, les valeurs de x et de y, déduites de (14), font évanouir S. Or on a (n° 5)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{\alpha} f \equiv \Phi(x, y). \tag{15}$$

Donc, pour calculer les nombres $n, n', n'', \ldots$, on peut opérer sur le premier membre de (15), au lieu d'opérer sur Φ. Soit n_1 le nombre analogue à n, obtenu en opérant sur $\frac{\partial S}{\partial y}$ comme je viens de l'indiquer sur Φ; soit ν le nombre obtenu en opérant sur f. En opérant sur le premier nombre de (15), on obtiendrait le nombre $(\alpha n_1 + \nu)$. Soient de même $n'_1, n''_1, \ldots; \nu', \nu'', \ldots$ les nombres analogues obtenus en opérant avec les systèmes circulaires (S'), (S''),.... On aura

$$n + n' + n'' + \ldots = \alpha(n_1 + n'_1 + n''_1 + \ldots) + \nu + \nu' + \nu'' + \ldots.$$

Je poserai

$$n_1 + n'_1 + n''_1 + \ldots = G, \quad \nu + \nu' + \nu'' + \ldots = L.$$

Le nombre des points de S, satisfaisant à la condition $f = 0$, et qui se réunissent en O, est $(\alpha G + L)$. Le nombre G se calcule, comme on le voit, indépendamment de l'équation différentielle, et le nombre L sur cette équation même. On peut donc considérer par là notre problème comme résolu. Tout ce qui va suivre constitue la discussion de notre solution. On pourrait toutefois compléter cette solution en examinant le cas où le point considéré est à l'infini. Il n'y a pas là de difficulté nouvelle, et la méthode précédente s'applique, avec une faible modification, à ce cas. Je n'en ferai pas le développement, puisqu'il a été prouvé précédemment (n° 9) que, sans nuire à la généralité, ce cas peut toujours être écarté.

11. Comme le nombre G ne dépend que de la courbe S, on est naturellement conduit à considérer successivement tous les points de S, dans lesquels G n'est pas nul. On doit penser que, dans le nombre total $\Sigma(\alpha G + L)$, la somme des nombres G sera remplacée par un élément simple de la courbe.

Pour donner au résultat sa forme la plus simple, je suppose qu'aucune asymptote, ni aucune tangente singulière de S ne soit parallèle à l'axe des y, et qu'en outre S n'ait aucune branche tangente à la droite de l'infini. Ces hypothèses ne diminuent pas la généralité, puisque, comme il a déjà été dit, nous entendons par S une transformée homographique quelconque de la courbe proposée. De ces suppositions il résulte que le nombre des tangentes de S, parallèles à l'axe des y, est égal à la *classe* de cette courbe.

Nous considérons tous les points de S dans lesquels G n'est pas nul, c'est-à-dire seulement ceux dans lesquels $\frac{\partial S}{\partial y}$ s'évanouit ; car ceux dans lesquels $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infini sont les points à l'infini de S, et ces points ne sont pas à considérer.

Or $\frac{\partial S}{\partial y}$ s'évanouit d'abord en tous les points singuliers de S. La somme $\sum G$, pour ces divers points, est égale (n° **10**) au nombre total des intersections des courbes $S = 0$, $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$, qui sont confondues en ces divers points.

Les autres points où $\frac{\partial S}{\partial y}$ s'évanouit sont ceux où la tangente de S est parallèle à l'axe des y. Leur nombre est la classe c de la courbe S. Soit m le degré de S; celui de $\frac{\partial S}{\partial y}$ est $(m-1)$. On a donc

$$c + \sum G = m(m-1).$$

Or, pour chacun des derniers points, nous savons (n° **9**) que $(\alpha G + L)$ est nul, puisque la courbe Φ n'y passe pas. Donc nous pouvons nous borner à considérer les points singuliers de S. Soit donc $\mathfrak{L}$ la somme des nombres L pour tous les points singuliers de S. Le nombre total des solutions réunies en ces points est :

$$\alpha \sum G + \mathfrak{L} = \alpha[m(m-1) - c] + \mathfrak{L}.$$

Mais le nombre total des solutions, c'est-à-dire des intersections de S et Φ, est $\alpha m(m-1) + \beta m$; donc le nombre N des solutions qui subsistent, après suppression de celles qui sont réunies aux points singuliers de S, est

$$N = \alpha c + \beta m - \mathcal{L}. \tag{16}$$

Ainsi le calcul se réduit à celui du nombre $\mathcal{L}$, que l'on trouvera en opérant sur l'équation différentielle elle-même exactement comme on ferait sur l'équation d'une courbe, pour trouver le nombre de ses intersections avec S, confondues aux divers points singuliers de S.

12. Le nombre $\mathcal{L}$ dépend à la fois de la courbe et de l'équation; on peut se demander suivant quelle loi. Il est manifeste qu'on ne saurait répondre à cette question sans supposer, entre la courbe et l'équation, une certaine indépendance. Cette réserve est analogue à celles que l'on est conduit à faire dans la théorie des *caractéristiques* des systèmes de coniques. Ce n'est pas sans dessein que je cite ici la théorie des caractéristiques : on va voir que les recherches actuelles ont avec cette théorie plus d'un rapport. En ce qui touche l'indépendance que je supposerai entre la courbe et l'équation différentielle, je la préciserai entièrement comme je vais l'expliquer.

Soit, comme au n° **10**, un système circulaire

$$x - \xi = t^r, \quad y - \eta = \varphi(t). \tag{17}$$

Je suppose d'abord que l'entier positif r et les exposants successifs de t, dans le développement de $\varphi(t)$ suivant les puissances entières et positives de t, soient des nombres donnés; mais que ξ, η et les coefficients du développement soient indéterminés. En opérant sur f comme il a été expliqué au n° **10**, on trouve un nombre ν, qui est un élément du nombre $\mathcal{L}$.

Soit maintenant donnée une courbe S, qui comprenne un système circulaire de branches représenté par les équations (17), dans lesquelles alors les constantes ne sont plus indéterminées, mais ont, au contraire, des valeurs données. En opérant de même sur f, on pourra trouver soit le nombre ν, soit un nombre supérieur. Si effectivement on trouve ν, et que la même chose ait lieu pour tous les systèmes circulaires de la courbe S en ses points singuliers, je dirai que la courbe S et l'équation différentielle sont *indépendantes*, ou que la condition exprimée par l'équation différentielle est *indépendante* de la courbe :

D'après cette définition même, et comme cas particulier, *l'élément du nombre $\mathfrak{L}$, relatif à un système circulaire de branches d'une courbe, et pour une condition indépendante de cette courbe, ne dépend pas de l'origine de ce système circulaire.* [L'origine du système circulaire (17) est le point ξ, η.]

Par exemple, il est manifeste que l'élément ν du nombre $\mathfrak{L}$, relatif à une branche ordinaire

$$x-\xi=t, \quad y-\eta=\mathrm{A}t+\mathrm{B}t^2+\mathrm{C}t^3+\ldots$$

est nul. Donc :

Théorème V. — *Sur une courbe qui ne possède que des branches simples* (ou, suivant M. Cayley, branches *linéaires*), *le nombre des points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et indépendante de la courbe, est $\alpha c+\beta m$. Les nombres c et m sont la classe et le degré de la courbe, les nombres α et β ne dépendent que de l'équation différentielle.* (Ce sont les mêmes qu'aux théorèmes III et IV.)

13. Considérons maintenant une courbe S qui comprenne des systèmes circulaires d'une famille déterminée, et qui, en dehors de ces systèmes circulaires, ne comprenne que des branches simples. J'entends par famille l'ensemble des systèmes circulaires (17) dans lequel les exposants sont donnés et les coefficients indéterminés. Soit ν l'élément du nombre $\mathfrak{L}$, relatif à un système circulaire de cette famille. Si l'on suppose l'indépendance entre la courbe et l'équation différentielle, le nombre $\mathfrak{L}$ sera le produit de ν par le nombre des systèmes circulaires de la famille considérée, qui se trouvent dans S. Soit k ce nombre; on a donc, pour le nombre des points de S qui satisfont à la condition considérée,

$$\mathrm{N}=\alpha c+\beta m-\nu k.$$

Si, de même, je considère une courbe S comprenant deux familles déterminées de systèmes circulaires, on aura

$$N = \alpha c + \beta m - \nu k - \nu' k'.$$

Et enfin, si l'on considère une courbe comprenant q familles déterminées de systèmes circulaires, on aura

$$(18)\qquad N = \alpha c + \beta m - \nu k - \nu' k' - \nu'' k'' \ldots - \nu^{(q-1)} k^{q-1}.$$

Tous les termes de cette formule sont, comme les deux premiers, le produit d'un nombre dépendant de la condition par un nombre dépendant de la courbe. Ainsi :

Théorème VI. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique et indépendante de la courbe s'exprime par une somme de termes dont chacun est le produit d'un nombre ne dépendant que de la condition par un nombre ne dépendant que de la courbe. Le nombre de ces termes est au plus égal* (on verra qu'il peut être moindre) *à celui des familles de systèmes circulaires que comprend la courbe* (en comptant les branches simples ordinaires pour une famille, et les branches simples à inflexion pour une seconde famille).

Si la courbe n'est en aucune façon précisée, le nombre des termes est-il effectivement illimité, comme semble l'indiquer ce dernier théorème? Ou plutôt dans quelle mesure faut-il préciser l'équation différentielle pour que, de ce fait, le nombre des termes se trouve limité? Telle est la question dont je vais actuellement m'occuper.

14. Je considère, en premier lieu, une équation différentielle du premier ordre $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$. Pour un système circulaire quelconque, à coefficients indéterminés, x, y, $\frac{dy}{dx}$ ont, à l'origine de ce système circulaire, des valeurs finies et indéterminées. Il en est de même de f. Donc, quel que soit le système circulaire, le nombre ν est nul; donc $\mathfrak{L}$ l'est aussi. Ainsi :

Théorème VII. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique* *plane quelconque, de classe c et de degré m, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle du premier ordre algébrique, et indépendante de la courbe, est* $(\alpha c + \beta m)$, *les nombres* α *et* β *ne dépendant que de l'équation différentielle.*

Si l'on applique à la fois à la courbe et à l'équation une transformation corrélative, le nombre $(\alpha c + \beta m)$ ne change pas, tandis que les nombres c et m se permutent entre eux. Donc les nombres α et β se permutent aussi entre eux. Par suite, la signification géométrique de α se trouvera en transformant celle de β, laquelle est évidente.

Je suppose que l'intégrale générale de l'équation proposée se représente par un système de courbes planes (généralement transcendantes), que, pour abréger, je désigne par *courbes intégrales.* En supposant $m = 1$, $c = 0$, je vois que β *est le nombre de courbes intégrales qui touchent une droite*. Par suite, α *est le nombre de courbes intégrales qui passent par un point*. Suivant les conventions usitées pour les systèmes de courbes algébriques, et étendues par M. Fouret aux systèmes de courbes transcendantes [*], les nombres α et β sont les *caractéristiques* du système formé par les courbes intégrales. Le théorème VII peut alors être énoncé comme il suit :

Dans un système dont les caractéristiques sont α *et* β, *le nombre des courbes qui touchent une courbe de classe c et de degré m est* $(\alpha c + \beta m)$ [**].

Il faut avoir soin d'ajouter, comme au théorème VII, que *la courbe doit être indépendante du système.*

15. Je considère, en second lieu, les équations différentielles du second ordre; mais je m'occupe d'abord de la plus simple, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, qui est celle des lignes droites, et qui, sur une courbe, en caractérise les points d'inflexion.

---

[*] *Bulletin de la Société mathématique*, t. II, p. 72.

[**] Cette proposition, connue depuis longtemps pour les systèmes de courbes algébriques, a été étendue par M. Fouret au cas actuel.

J'applique d'abord à cette équation le théorème III. En supposant

$$y = \eta + A(x-\xi)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

je trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4}A(x-\xi)^{-\frac{1}{2}} + \ldots;$$

donc (théorème III) $\alpha = 3$. Je suppose ensuite

$$y = Bx + C + \frac{D}{x} + \ldots,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{D}{x^3} + \ldots;$$

donc $\beta = -3$. La courbe Φ, qui coupe la courbe S de degré m en ses points d'inflexion, est donc de degré $3(m-1) - 3 = 3(m-2)$, ce qui est bien connu. J'arrive maintenant à l'étude du nombre $\mathfrak{L}$. Soit un système circulaire

$$(19) \qquad x - \xi = t^r, \quad y - \eta = \varphi(t) = At^r + Bt^{r+\rho} + \ldots.$$

Dans le développement de $\varphi(t)$, j'ai supposé le premier terme du degré r. C'est en effet la condition pour que la tangente ne soit parallèle à aucun des axes des coordonnées. Pour calculer le nombre ν, élément de $\mathfrak{L}$, relatif au système circulaire (19), exprimons $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de t, développons suivant les puissances ascendantes de t, et prenons le premier terme. Ce premier terme est

$$(20) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{r}\left(1+\frac{\rho}{r}\right)Bt^{\rho-r} + \ldots;$$

donc $\nu = \rho - r$. Donc le nombre des points d'inflexion d'une courbe de degré m et de classe c est $3(c-m) - \Sigma(\rho - r)$, la sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ses points singuliers.

Je donne habituellement à ce résultat une autre forme. Pour une branche simple ($r = 1$) et ordinaire ($\rho = 1$), le nombre $(\rho - r)$ est nul. Pour une branche simple et à inflexion ($\rho = 2$), le nombre ($\rho - r$) est égal à l'unité. Enfin, pour une branche simple où ρ est supérieur à 2, on voit que l'origine de cette branche compte pour ($\rho - 1$) ou ($\rho - r$) inflexions. Par analogie, pour un système circulaire quelconque où le nombre ρ est supérieur à r, j'ai donné au nombre ($\rho - r$) le nom de *nombre des inflexions effectives* contenues dans les branches de ce système circulaire. Cette dénomination se justifie par diverses considérations qui ne sauraient trouver place ici. Au contraire, quand le nombre ρ est égal ou inférieur à r, je conviens de dire que le système circulaire ne contient pas d'inflexion effective. Pour donner à la formule du nombre des points d'inflexion la forme que j'ai en vue, je conserve les lettres r et ρ seulement pour les systèmes circulaires où l'on a $\rho > r$. En outre, dans la sommation $\Sigma(\rho - r)$, je fais entrer les branches simples à inflexion. Je désigne cette somme par la lettre i. Le nombre i est celui des inflexions effectives de la courbe. En second lieu, j'emploie les lettres r' et ρ' pour les systèmes circulaires où l'on a $\rho' < r'$, et je désigne par i' la somme $\Sigma(r' - \rho')$. Les systèmes circulaires, où l'on a $\rho = r$, disparaissent d'eux-mêmes, et la formule des points d'inflexion devient

$$(21) \qquad i - i' = 3(c - m).$$

Mais, par une transformation corrélative, un système circulaire tel que (19) se change en un autre où les deux nombres r et ρ sont permutés entre eux. Donc le nombre i' a, pour une courbe corrélative de la proposée, le même sens que le nombre i pour la courbe proposée elle-même. La formule (20) peut donc être ainsi énoncée :

La différence des nombres des inflexions effectives de deux courbes corrélatives est égale au triple de la différence de leurs degrés pris en ordre inverse.

Il était nécessaire de rappeler ici la formule (20), afin de pouvoir interpréter le résultat que je vais maintenant obtenir pour les équations quelconques du second ordre.

16. Il s'agit d'étudier la composition du nombre $\mathfrak{L}$ pour une équation du second ordre

$$(22)\qquad 0 = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = \sum \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^s.$$

L'équation proposée étant mise sous forme entière, ψ est un polynôme entier et s un entier positif. De plus, parmi les diverses valeurs de l'entier s, correspondant aux divers termes de l'équation, il s'en trouve une qui est zéro, sans quoi l'équation serait divisible par $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Je considère encore le système circulaire (19). Les parties principales de $x, y, \frac{dy}{dx}$ sont ξ, η, A, qui sont des indéterminées. Donc, après substitution des valeurs qui répondent au système circulaire (19), le polynôme ψ a pour partie principale une constante qui n'est pas nulle. En second lieu, la partie principale de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est, comme on l'a vu (20), de l'ordre $(\rho - r)$. J'ai ici à distinguer trois cas, suivant le signe de $(\rho - r)$.

1° $\rho > r$. Tous les termes dans lesquels s n'est pas nul ont des parties principales de degrés positifs. Seul, le terme où s est nul a pour partie principale une constante. Donc la partie principale de f est une constante. Donc le nombre ν est nul. Donc les systèmes circulaires où l'on a $\rho > r$ n'interviennent pas dans la composition du nombre $\mathfrak{L}$.

2° $\rho = r$. Tous les termes de (22) ont pour parties principales des constantes. Il faut se demander si, entre ces divers termes, peut exister une réduction qui fasse disparaître la somme de leurs parties principales. Or, d'après l'équation (20), la partie principale du terme $\psi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^s$ est

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^s\left(1 + \frac{\rho}{r}\right)^s \psi(\xi, \eta, \text{A})\,\text{B}^s.$$

Elle ne peut se réduire avec la partie principale d'un autre terme : ces deux expressions contiennent, en effet, l'indéterminée B avec des exposants différents. Donc la partie principale de f est encore une constante. Donc les systèmes circulaires où l'on a $\rho = r$ n'interviennent pas non plus dans la composition du nombre $\mathfrak{L}$.

3° $\rho < r$. La partie principale de chaque terme est d'ordre négatif $-s(r-\rho)$. Soit γ la plus grande valeur de s, c'est-à-dire le degré de l'équation par rapport à $\frac{d^2 y}{dx^2}$. La partie principale de f est de l'ordre $-\gamma(r-\rho)$. Tel est donc l'élément du nombre $\mathfrak{L}$ pour un système circulaire où l'on a $\rho < r$. Le nombre $\mathfrak{L}$ est donc égal à $-\gamma i'$, le nombre i' étant, comme précédemment, la somme des nombres positifs $(r-\rho)$. Donc :

Théorème VIII. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle du second ordre, et indépendante de la courbe, est* $\alpha c + \beta m + \gamma i'$; *les nombres* c, m, i' *dépendent de la courbe seule, et les nombres* α, β, γ *de l'équation différentielle seule.*

Les nombres c *et* m *sont la classe et le degré de la courbe. Le nombre* i' *est celui des inflexions effectives des courbes corrélatives de la proposée.*

Il est manifeste qu'on peut, en appliquant à la courbe et à l'équation une transformation corrélative, exprimer le même nombre par la formule $\alpha' m + \beta' c + \gamma' i$, où α', β', γ' sont les nombres analogues à α, β, γ pour l'équation différentielle transformée, et où le nombre i est, comme ci-dessus, le nombre des inflexions effectives de la courbe elle-même. Mais on peut obtenir immédiatement la nouvelle formule en partant de la précédente et en faisant usage de la formule (21). Je tire de cette dernière l'expression de i', et je conclus :

$$\mathrm{N} = \alpha c + \beta m + \gamma i' = (\beta + 3\gamma) m + (\alpha - 3\gamma) c + \gamma i.$$

Ainsi les coefficients α', β', γ' sont exprimés par α, β, γ comme il suit :

$$(23) \qquad \gamma' = \gamma, \quad \alpha' = \beta + 3\gamma, \quad \beta' = \alpha - 3\gamma.$$

La troisième équation se déduit de la seconde en permutant l'accent, en sorte que ces relations sont bien, comme cela doit être, symétriques par rapport aux deux systèmes de nombres.

Quelles sont, maintenant, les significations géométriques des nombres α, β, γ, en supposant, comme au n° **14**, que l'intégrale générale de l'équation différentielle se puisse représenter par une série, ici doublement infinie, de courbes que j'appelle, pour abréger, *courbes intégrales?* En premier lieu, γ *est, comme on l'a vu, le degré de l'équation par rapport à* $\frac{d^2y}{dx^2}$. Donc c'est le nombre des valeurs de cette dérivée qui répondent à un système de valeurs données pour x, y, $\frac{dy}{dx}$. Donc γ *est le nombre des courbes intégrales qui passent par un point donné et y touchent une droite donnée.* Sous cette forme, il est évident que le nombre γ se conserve dans les transformations corrélatives, ainsi que le montre aussi la première des équations (23).

En second lieu, si je fais $m=1$, $c=0$, $i'=0$, N se réduit à β. Donc β *est le nombre des points d'une droite qui satisfont à la condition exprimée par l'équation différentielle, ou le nombre des courbes intégrales qui ont une droite donnée pour tangente d'inflexion.*

Le nombre β' a la signification corrélative de celle de β. Donc, d'après (23), *le nombre* $(\alpha-3\gamma)$ *est le nombre des courbes intégrales qui ont, pour point de rebroussement, un point donné.* Au point de vue algébrique, on verra sans peine que *le même nombre* $(\alpha-3\gamma)$ *est égal au degré, par rapport à* $\frac{dy}{dx}$, *du coefficient de la plus haute puissance de* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *dans l'équation différentielle.*

17. Revenons, pour un instant, à la considération d'une équation différentielle d'ordre quelconque, et supposons une courbe S qui ne possède, en outre de branches simples, que des systèmes circulaires d'une seule famille : le rebroussement ordinaire, lequel est caractérisé par les équations

$$x-\xi=t^2,\quad y-\eta=\mathrm{A}t^2+\mathrm{B}t^3+\mathrm{C}t^4+\ldots.$$

Reportons-nous aux résultats du n° **15**, et appelons $(-\gamma)$ le nombre ν relatif à cette famille de systèmes circulaires, pour l'équation proposée. La courbe S ne possède, en fait d'inflexions effectives, que des inflexions ordinaires. Ainsi, pour cette courbe, le nombre ι

est (n° 15) celui de ses inflexions ordinaires. Une courbe S′, corrélative de S, ne possède également, en fait d'inflexions effectives, que des inflexions ordinaires, corrélatives des rebroussements de S. Donc le nombre i' est ici celui des rebroussements de S. Cela posé, la formule (18) du n° 15 donne, pour le nombre des points de la courbe S qui satisfont à la condition exprimée par l'équation différentielle,

$$(24) \qquad N = \alpha c + \beta m + \gamma i'.$$

Cette formule est entièrement semblable à celle qui est relative à une équation du second ordre et à une courbe ayant des singularités *quelconques*. Mais il ne faut pas perdre de vue que, dans le cas actuel, la courbe S ne doit posséder que des singularités spéciales. Toutefois, comme les courbes corrélatives de S ne contiennent, elles aussi, que ces mêmes singularités, on peut aussi, de la formule (24), déduire, de même que précédemment, la formule corrélative. Donc les équations (23) ont encore lieu entre α, β, γ et les coefficients analogues α', β', γ' relatifs à l'équation différentielle, transformée de la proposée par corrélation. La signification du coefficient γ ne peut plus ici être donnée d'une manière aussi simple; quant aux autres coefficients, leur signification se modifie à peine, ainsi qu'on le verra dans cet énoncé :

Théorème IX. — *Soit une courbe ne contenant que des branches simples et des branches à rebroussement ordinaire : le nombre de ses points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique d'ordre n, et indépendante de la courbe, est $\alpha c + \beta m + \gamma r$. Les nombres c, m, r sont : la classe, le degré, le nombre des branches à rebroussement de la courbe. Les nombres α, β, γ ne dépendent que de l'équation différentielle, et ont les significations suivantes :*

β est le nombre des points d'une droite qui satisfont à la condition exprimée par l'équation différentielle, ou le nombre des courbes intégrales qui ont une droite donnée pour tangente de $(n-1)^{uple}$ inflexion.

$(\alpha - 3\gamma)$ est le nombre des courbes intégrales qui, en un point donné,

se composent de n branches ayant, avec une même tangente, des contacts de l'ordre $\frac{1}{n}$.

$3(\alpha+\beta)+\gamma$ est le nombre des courbes intégrales qui ont un contact d'ordre n avec une courbe donnée du troisième ordre et de la troisième classe.

On peut aussi remarquer que $2(\alpha+\beta)$ est *le nombre des courbes intégrales qui ont, avec une conique donnée, un contact d'ordre n.* Ceci rend évident que le nombre $(\alpha+\beta)$ se conserve dans les transformations corrélatives, ainsi que le montrent aussi les équations (23). Cela étant, la signification du nombre $3(\alpha+\beta)+\gamma$ rend également évident que le nombre γ se conserve dans les transformations corrélatives.

Sous une forme géométrique, on peut énoncer le théorème IX (et la même remarque s'applique au théorème VIII) en disant que *le nombre des courbes d'une série ∞^n dans un plan, qui ont, avec une courbe donnée, un contact d'ordre n, est $\alpha c+\beta m+\gamma r$, pourvu que cette dernière ne contienne que des singularités ordinaires.*

Les interprétations précédentes des coefficients donnent, dans certains cas, des résultats d'apparence paradoxale, dont il est nécessaire de dire quelques mots. On ne doit pas perdre de vue que, dans tout le cours de cette analyse, il a été supposé (n° 9) que la courbe S ne fournit pas une intégrale de l'équation différentielle considérée. Il n'est donc pas permis d'appliquer les résultats acquis aux cas où cette supposition n'est pas vérifiée. Par exemple, si β est négatif, l'interprétation de ce nombre n'a plus aucun sens. On en peut conclure que les lignes droites fournissent des intégrales de l'équation. Si $(\alpha+\beta)$ est négatif, c'est que les coniques sont dans le même cas, etc. Je tire de là cette conséquence, qui me sera utile plus loin : *le nombre $(\alpha+\beta)$ ne peut être négatif que si l'équation différentielle est au moins du cinquième ordre.*

18. Dans l'énoncé du théorème VIII, que l'on peut rapprocher du théorème IX, une circonstance doit attirer l'attention : si, au lieu de considérer une courbe S, de degré m, de classe c et possédant des singularités quelconques, on avait envisagé une courbe de degré m, possédant i' rebroussements ordinaires et, en outre, des points doubles ordinaires en nombre tel que, joints aux i' rebroussements, ils produisent l'abaissement $m(m-1)-c$ de la classe de la courbe, la formule $\alpha c+\beta m+\gamma i'$ n'aurait pas été changée. Ainsi, au point de vue de cette formule, toutes les singularités de la courbe produisent le même effet que i' rebroussements, et $\delta=\frac{1}{2}[m(m-1)-c-3i']$ points doubles. Si, en outre, on envisage, en même temps, la formule corrélative $(\beta+3\gamma)m+(\alpha-3\gamma)c+\gamma i$, on voit que les mêmes singularités produisent le même effet que i tangentes d'inflexion et $\delta'=\frac{1}{2}[c(c-1)-m-3i]$ tangentes doubles. Nous sommes ainsi conduits à nous placer à un point de vue que les équations de *Plücker* et un Mémoire bien connu de M. *Cayley* ont rendu familier aux géomètres : nous nous trouvons en présence d'une catégorie de questions dans lesquelles toutes les singularités d'une courbe plane algébrique quelconque sont entièrement représentées par des nombres déterminés de points doubles, de points de rebroussement, de tangentes doubles et de tangentes d'inflexion.

Mais il faut se garder de donner à cette conception une extension qu'elle ne comporte pas. Ce serait, par exemple, une erreur de croire que les éléments dont je viens de parler, ou même d'autres, en nombre fini et déterminé, pourraient suffire à représenter, dans toutes les questions géométriques, les singularités d'une courbe algébrique quelconque. On s'en convaincra aisément par l'examen des circonstances qui s'offrent à l'égard des équations différentielles d'ordre supérieur au second. C'est de ce sujet que je vais maintenant m'occuper, en me bornant toutefois aux équations du troisième ordre, qui donnent une idée suffisante des résultats relatifs aux équations d'ordre plus élevé.

19. Soit une équation différentielle algébrique du troisième ordre

$$(25)\quad 0=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\sum\psi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\lambda}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\mu},$$

où ψ est un polynôme entier; λ et μ sont des entiers positifs : une au moins des valeurs de λ est nulle; de même à l'égard de μ.

J'ai, comme précédemment, à étudier la composition du nombre $\mathfrak{L}$.

Soit, à cet effet, un système circulaire

$$(26)\qquad x-\xi=t^r,\quad y-\eta=\varphi(t)=\mathrm{A}t^r+\mathrm{B}t^{r+\rho}+\mathrm{C}t^{r+\rho+\sigma}+\ldots.$$

Je distinguerai deux cas, suivant que ρ est égal à r, ou en est différent. Le premier de ces cas est très-simple et entièrement analogue à celui du n° **16**. En supposant $\rho=r$, on trouve, pour les parties principales des dérivées de y,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\mathrm{B}+\ldots,\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\sigma}{r}\left(1+\frac{\sigma}{r}\right)\left(2+\frac{\sigma}{r}\right)\mathrm{C}.t^{\sigma-r}+\ldots.$$

Répétant ici l'analyse du n° **16**, on trouvera que le nombre ν est nul si σ est supérieur ou égal à r. Si, au contraire, σ est inférieur à r, et que δ soit le degré de f par rapport à $\frac{d^3y}{dx^3}$, le nombre ν est égal à $-\delta(r-\sigma)$. Par suite, pour l'ensemble des systèmes circulaires d'une courbe S, dans lesquels on a $\rho=r$, $\sigma<r$, l'élément du nombre $\mathfrak{L}$ est $-\delta\Sigma(r-\sigma)$.

J'arrive maintenant au cas où ρ est différent de r. D'après l'hypothèse $\rho \gtrless r$, on a, pour les parties principales, déduites de (26),

$$(27)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\rho}{r}\left(1+\frac{\rho}{r}\right)\mathrm{B}t^{\rho-r}+\ldots,\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho^2}{r^2}-1\right)\mathrm{B}t^{\rho-2r}+\ldots.$$

Après substitution des valeurs tirées de (26), pour x, y,..., la partie principale du terme mis en évidence, dans (25), a pour degré

$$(28)\qquad \partial=\lambda(\rho-r)+\mu(\rho-2r)=(\lambda+\mu)\rho-(\lambda+2\mu)r.$$

Pour obtenir le degré de la partie principale de f, j'ai à chercher la plus petite des valeurs que puisse acquérir ∂ par la substitution aux lettres λ, μ de tous les systèmes de valeurs dont elles sont susceptibles dans (25). On voit immédiatement que le système (λ,μ), propre à fournir ce minimum, dépend généralement du rapport des nombres ρ et r. De là résulte une différence notable entre le cas actuel et ceux qui ont été précédemment envisagés.

La forme de l'expression (28) suggère naturellement l'idée d'employer, pour étudier le minimum de ∂, l'artifice imaginé par *Newton* pour une question analogue. Le procédé que je vais développer est donc une imitation de la règle connue sous le nom de *parallélogramme de Newton*.

20. Le principe de cette règle se réduit à une proposition des plus simples : *Soient, dans un plan, et relativement à deux axes de coordonnées,* U, V *les coordonnées d'un point donné* M ; *et* u, v *les coordonnées d'un point variable* m, *astreint à être situé dans l'intérieur d'un contour fermé et convexe* (C). *L'expression* $(u\mathrm{V} - v\mathrm{U})$ *a un maximum et un minimum : on les obtient en plaçant* m *en l'un ou l'autre des deux points du contour, dans lesquels la tangente de ce contour est parallèle à la droite qui joint l'origine au point* M.

Pour distinguer le maximum et le minimum entre eux, on peut faire usage de la règle suivante : *Que l'on circonscrive au contour* C *un parallélogramme dont les côtés soient respectivement parallèles aux axes. Soient* p, q *les points de contact, avec* C, *de deux côtés consécutifs, et* Ω *le sommet du parallélogramme, point de concours de ces deux côtés, dont l'un* Ωp *est parallèle à l'axe des* u, *l'autre* Ωq *est parallèle à l'axe des* v. *La partie du contour* C, *inscrite dans l'angle* $p\Omega q$ *et tournant sa convexité vers* Ω, *sera distinguée par les signes des deux directions* Ωp, Ωq.

Cela posé, le point m, *qui rend* $(u\mathrm{V} - v\mathrm{U})$ *minimum, est situé dans la partie distinguée par les signes :*

$+$ *pour* Ωp *et* $-$ *pour* Ωq, *si* M *est dans l'angle* $(+u, +v)$;
$+$ . . . . . . $+$ . . . . $(-u, +v)$;
$-$ . . . . . . $+$ . . . . $(-u, -v)$;
$-$ . . . . . . $-$ . . . . $(+u, -v)$.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer ces règles, et je me borne à faire observer qu'elles s'appliquent aussi bien à un contour brisé qu'à un contour formé par une ligne continue. Il suffit que le contour soit toujours fermé et convexe. Quand le contour présente un angle, on doit entendre par *tangente* une droite qui, sans traverser le contour, passe par le sommet de l'angle.

21. Pour appliquer à l'étude du minimum de ∂ les règles précédentes, je pose

$$(29) \qquad \lambda + \mu = u, \quad \lambda + 2\mu = v.$$

A chaque terme de l'équation (25) correspond ainsi un point m, dont les coordonnées sont u, v. On peut unir par des lignes droites un certain nombre de ces points, de manière à tracer un polygone fermé et convexe, satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° tous ses sommets sont des points correspondant à des termes de (25); 2° tous les autres points qui correspondent à des termes de (25) sont à l'intérieur de ce polygone. C'est ce polygone qui sera notre contour (C). Les coordonnées U et V du point M seront les nombres r et ρ, en sorte que (28) ∂ sera l'expression $(uV - vU)$. Comme r et ρ sont essentiellement positifs, M est dans l'angle $(+u, +v)$, en sorte que la partie *utile* du contour (C) sera uniquement celle qui est distinguée par la combinaison de signes $(+, -)$.

Soit m_j un sommet de (C), compris dans la partie utile. Ce sont les coordonnées de ce sommet qui rendent ∂ minimum si la droite menée par m_j avec le coefficient angulaire $\frac{\rho}{r}$ ne traverse pas le polygone; c'est-à-dire si $\frac{\rho}{r}$ est compris entre les coefficients angulaires des deux côtés dont l'intersection est m_j.

Soient donc $m_1, m_2, \ldots, m_k$ les sommets consécutifs de la partie utile de (c), rangés dans leur ordre naturel, et de telle sorte que les coefficients angulaires $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ des côtés m_1m_2, $m_2m_3, \ldots$ aillent en décroissant. Désignons, en général, par λ_j, m_j les valeurs de λ et μ qui correspondent à m_j. Le minimum de ∂ est

$$
\begin{array}{lll}
(\lambda_1 + \mu_1)\rho - (\lambda_1 + 2\mu_1)r, & \text{si} & \frac{\rho}{r} > c_1, \\
(\lambda_2 + \mu_2)\rho - (\lambda_2 + 2\mu_2)r, & \text{si} & c_1 > \frac{\rho}{r} > c_2, \\
\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & & \\
(\lambda_{k-1} + \mu_{k-1})\rho - (\lambda_{k-1} + 2\mu_{k-1})r, & \text{si} & c_{k-2} > \frac{\rho}{r} > c_{k-1}, \\
(\lambda_k + \mu_k)\rho - (\lambda_k + 2\mu_k)r, & \text{si} & c_{k-1} > \frac{\rho}{r}.
\end{array}
$$

22. Connaissant le minimum de ∂, il nous reste à établir que ce minimum est l'ordre même de la partie principale de f. Il ne peut y avoir de doute à cet égard que si le même minimum est fourni par deux termes au moins : on pourrait, dans ce cas, craindre une réduction entre les parties principales de ces termes. Supposons donc qu'on ait, pour deux termes différents,

$$\partial = (\lambda + \mu)\rho - (\lambda + 2\mu)r = (\lambda' + \mu')\rho - (\lambda' + 2\mu')r.$$

En vertu de (27), les parties principales correspondantes contiennent, en facteur, la lettre B, respectivement avec les exposants $(\lambda + \mu)$ et $(\lambda' + \mu')$. Pour que la réduction fût possible, il faudrait donc que l'on eût $\lambda + \mu = \lambda' + \mu'$. Il en résulterait donc soit $r = 0$, soit $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, ce qui est impossible.

Donc le degré de la partie principale de f est égal au minimum de ∂.

Soit maintenant une courbe S, indépendante de l'équation différentielle. Je pose

$$\Sigma(\rho - r) = g_j, \quad \Sigma(\rho - 2r) = h_j,$$

les sommations s'appliquant à tous les systèmes circulaires de S, où ρ et r sont différents, et où l'on a

$$c_{j-1} \geqq \frac{\rho}{r} > c_j.$$

Ces conditions s'appliquent aux valeurs $1, 2, \ldots, k$ du nombre j, à condition de supposer

$$c_0 = +\infty, \quad c_k = 0.$$

Il résulte, de l'analyse précédente, que la partie du nombre $\mathfrak{L}$, relative à tous les systèmes circulaires de S, où ρ et r sont différents, est ainsi

$$(30) \qquad \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_k g_k + \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \ldots + \mu_k h_k.$$

Cette expression contient $2k$ termes; mais un des coefficients, au moins, est toujours nul. En effet, d'après (29), on a $2u - v = \lambda$.

Comme λ est toujours positif et qu'au moins une de ses valeurs est nulle, on voit qu'un, au moins, des sommets utiles du polygone (c) correspond à une valeur nulle de λ. Donc un des coefficients λ, dans l'expression (30), s'évanouit. D'autre part, par un raisonnement analogue, on verra qu'aucune des valeurs nulles de μ ne correspond à un sommet utile du polygone. Par suite, l'expression (30) se réduit, en général, à $(2k-1)$ ou $(2k-2)$ termes. Il peut y avoir encore une autre réduction dans le nombre des termes. Car la même valeur de λ peut appartenir à deux sommets différents de la partie utile du polygone; et de même pour les nombres μ. On voit ainsi que *le nombre des termes distincts de l'expression* (30) *a pour limite inférieure le nombre des sommets utiles du polygone, diminué d'une unité.*

D'après (29), on a $u - v = -\mu$. Donc $(u - v)$ est minimum quand μ est maximum. Donc, parmi les sommets utiles de (c), se trouve un sommet répondant à une valeur de μ égale au degré de l'équation par rapport à $\frac{d^3y}{dx^3}$. C'est ce degré que j'ai précédemment désigné par δ (n° 19). Or on a vu que l'ensemble des systèmes circulaires de S, où les nombres ρ et r sont égaux, fournit au nombre $\mathfrak{L}$ l'élément $-\delta\Sigma(r-\sigma)$. Le coefficient δ de cet élément étant un des nombres μ de (30), il en résulte que $\mathfrak{L}$ se réduit lui-même, en tenant compte de toutes les réductions, à une somme de termes des deux formes λg et μh, où λ et μ sont des exposants de (25) correspondant à des sommets utiles de (c), et g et h des nombres dépendant de la courbe S.

25. Je résume ces résultats dans l'énoncé suivant :

Théorème X. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique du troisième ordre, et indépendante de la courbe, s'exprime par une somme de termes dont chacun est le produit d'un coefficient ne dépendant que de la condition par un nombre ne dépendant que de la courbe.*

Deux de ces termes sont αc, βm, les mêmes qu'au théorème IX

Soit

$$0 = \sum \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\lambda \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^\mu$$

l'équation différentielle proposée, sous forme entière. Dans les autres termes, les coefficients qui ne dépendent que de la condition sont, quelques-uns, des exposants λ, μ, *définis comme il suit :*

A chaque terme de l'équation, faites correspondre, dans un plan, un point m dont les coordonnées rectilignes soient $u = \lambda + \mu$, $v = \lambda + 2\mu$. *Tracez le polygone fermé et convexe, dont les sommets soient choisis parmi ces points, et qui enveloppe tous les autres. Considérez, parmi les sommets, ceux auxquels aboutissent des côtés dont les coefficients angulaires sont positifs, et qui, en outre, appartiennent à la partie du polygone dont la convexité est tournée vers l'axe des* v.

Les exposants λ *et* μ *qui correspondent à ces derniers sommets sont les coefficients dont il s'agit.*

On voit, par cette dernière proposition, que, contrairement à ce qui se passe pour les équations du premier et du second ordre, il ne suffit pas de savoir que la condition considérée est exprimée par une équation différentielle algébrique du troisième ordre pour en pouvoir conclure le nombre des termes auxquels se réduit la formule (18) du n° **13**. Pour connaître une limite supérieure du nombre de ces termes, la courbe S restant indéterminée, il sera nécessaire de savoir d'avance que les exposants λ, μ sont renfermés dans de certaines limites. Par exemple, si l'on connaît le degré de l'équation différentielle par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$, on pourra manifestement assigner une limite supérieure au nombre des termes considérés. En effet, le polygone auxiliaire se trouvera renfermé dans un parallélogramme donné, et l'on connaîtra une limite supérieure du nombre de ses sommets. Mais il est également visible qu'on peut toujours choisir une équation différentielle du troisième ordre, de manière que le nombre des termes soit plus grand que tout nombre donné.

On a vu, au n° **13**, que si la courbe que l'on considère est astreinte à ne posséder que des singularités appartenant à des familles déterminées, en nombre fini, le nombre de ces mêmes termes est, par là, déterminé, quel que soit l'ordre de l'équation différentielle. On voit donc, par ce rapprochement, qu'il est impossible de trouver un nombre limité de familles de singularités qui, dans les problèmes dépendant des éléments infinitésimaux du troisième ordre, représentent les singularités d'une courbe quelconque. C'est, comme nous l'avons vu précédemment, le contraire qui a lieu dans les problèmes dépendant des éléments infinitésimaux du premier et du second ordre.

Je n'examinerai pas ici les questions analogues pour les équations différentielles d'ordre supérieur au troisième. La méthode suivie précédemment s'y applique cependant, mais avec quelques complications nouvelles. Laissant donc, quant à présent, ces questions à l'écart, je terminerai ce paragraphe en montrant comment, des coefficients λ, μ qui entrent dans l'expression de $\mathcal{L}$ pour une équation différentielle du troisième ordre donnée, on peut déduire les analogues pour l'équation transformée par corrélation.

24. Je remarque, en premier lieu, que pour une branche simple, à inflexion simple ($r=1$, $\rho=2$), l'élément du nombre $\mathcal{L}$, savoir, le minimum de

$$\partial = \lambda(\rho - r) + \mu(\rho - 2r),$$

est nul. Car ∂ se réduit à λ, dont le minimum est zéro. Il en est autrement pour un rebroussement ordinaire ($r=2$, $\rho=1$). D'après le n° **21**, soit

$$c_{s-1} \geqq \frac{1}{2} > c_s;$$

l'élément de $\mathcal{L}$, pour un rebroussement ordinaire, sera $-(\lambda_s + 3\mu_s)$. En employant la même notation qu'au n° **17**, je poserai

$$\lambda_s + 3\mu_s = \gamma.$$

Entre α, β, γ et les coefficients correspondants pour la transformée de l'équation proposée par corrélation, ont lieu les équations (23) du n° **16**, ainsi que je l'ai prouvé au n° **17**. Ces équations sont

$$(31) \qquad \gamma' = \gamma, \quad \alpha' = \beta + 3\gamma, \quad \alpha = \beta' + 3\gamma.$$

Soit maintenant une courbe S comprenant ι rebroussements ordinaires, ι' inflexions ordinaires, enfin un système circulaire $(r, \rho, \rho \gtrless r)$. On a (n° **15**)

$$(32) \qquad \iota' - \iota - (r - \rho) = 3(c - m).$$

Soient λ, μ les nombres qui correspondent au sommet du polygone (C), dont les côtés comprennent la direction $\frac{\rho}{r}$; j'ai (n° **22**), pour le nombre des points de S qui satisfont à la condition exprimée par l'équation considérée,

$$N = \alpha c + \beta m + \gamma\iota + \lambda(r - \rho) + \mu(2r - \rho).$$

En remplaçant, dans cette dernière équation, ι par son expression déduite de (32), j'obtiens

$$(33) \quad N = (\alpha - 3\gamma)c + (\beta + 3\gamma)m + \gamma\iota' + (\gamma - 3\mu - \lambda)(\rho - r) + \mu(2\rho - r).$$

D'ailleurs, pour une courbe S', corrélative de S, les nombres m, c, ι, r, ρ se changent en c, m, ι', ρ, r. Les coefficients α', β', γ', analogues à α, β, γ, se déduisent des trois premiers termes de (33). On a ainsi les équations (31). Soient maintenant λ', μ' les nombres qui correspondent, dans l'équation transformée, aux systèmes circulaires (ρ, r). On a, d'après les derniers termes de (33),

$$(34) \qquad \lambda' + \lambda + 3\mu = \gamma, \quad \mu' = \mu.$$

Ce sont les relations cherchées. Elles permettent, étant donné le polygone (C), de construire le polygone (C'), relatif à l'équation transformée, ou, du moins, la partie utile de ce polygone. Cette construction est des plus simples. Soient, en effet, u, v (29) les coordonnées d'un sommet utile m de (C), et u', v' les coordonnées du sommet correspondant de (C'). Les relations (34) deviennent

$$v - u = v' - u', \quad u + v + u' = v' = 2\gamma.$$

Par suite, la droite mm' est parallèle à la droite $v - u = 0$, et partagée en deux parties égales par la droite $u + v = \gamma$. Si l'on suppose les axes rectangulaires, les points m, m' sont symétriques par rapport à la droite $u + v = 2\gamma$. Par suite, *les axes étant rectangulaires, les parties utiles des polygones* (C) *et* (C') *sont égales.*

Je ferai enfin observer, en dernier lieu, que l'on peut imaginer des équations différentielles pour lesquelles le nombre des sommets utiles de (C) soit aussi petit que l'on voudra. Si, par exemple, on prend une équation homogène et de degré θ par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$, on n'aura qu'un seul sommet, lequel répond à $\lambda = 0$, $\mu = \theta$. On a alors, pour toute courbe S,

$$N = \alpha c + \beta m + \theta[\Sigma(2r - \rho) + \Sigma(r - \sigma)],$$

la première sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires de S où r et ρ sont différents, et la seconde à tous ceux où $\rho = r$ et où σ est inférieur à r.

(*A suivre.*)

Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable;

PAR M. G. DARBOUX.

I.

On donne ordinairement, dans les cours de Calcul infinitésimal, différentes formes du reste de la série de Taylor qui s'appliquent seulement au cas où la variable suivant les puissances de laquelle on développe demeure réelle. Je vais d'abord montrer que les mêmes formes demeurent applicables avec de très-légères modifications, quand la variable et la fonction prennent des valeurs imaginaires.

Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Imaginons qu'un mobile M *se déplace sur la droite* AB, *toujours dans le même sens, de* A *vers* B *par exemple; et qu'un point* m *dont le mouvement est lié à celui du premier décrive d'un mouvement continu une courbe* acb *quand le point* M *va de* A *à* B. *Je dis qu'il y aura au moins une position des points correspondants* M, m *pour laquelle le rapport des chemins infiniment petits* ds_1, $d\rho_1$ *décrits en même temps,* ds_1 *par le point* m, $d\rho_1$ *par le point* M, *sera supérieur ou égal au rapport de la corde* ab *à la droite* AB.

En effet, si l'on avait toujours

$$\frac{ds_1}{d\rho_1} < \frac{ab}{\mathrm{AB}}, \quad ds_1 < \frac{ab}{\mathrm{AB}}\, d\rho_1$$

on aurait, en intégrant entre les limites extrêmes,

$$\text{arc}\, acb < \frac{ab}{\mathrm{AB}} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\rho_1 \quad \text{ou} \quad \text{arc}\, acb < ab,$$

ce qui est évidemment absurde.

Le lemme est donc démontré. Nous ferons remarquer que, si la démonstration suppose que M se meuve toujours dans le même sens, elle demeure valable alors même que le point m rétrograderait sur la courbe qui lui sert de trajectoire, l'intégrale $\int ds_1$ représentant la longueur totale du chemin décrit par le point m, et cette longueur totale étant toujours supérieure à la corde ab.

Imaginons que les points M, m servent de représentation à deux fonctions de variables imaginaires : M a une fonction $\varphi(z)$, m a une autre fonction $f(z)$. Admettons que, lorsque z varie de z_0 à z_1 d'une manière déterminée, le point M, qui représente $\varphi(z)$, décrive un segment de droite AB toujours dans le même sens. On aura ici

$$\frac{ab}{\mathrm{AB}} = \text{mod.}\,\frac{f(z_1)-f(z_0)}{\varphi(z_1)-\varphi(z_0)}.$$

Quant au rapport $\frac{ds_1}{d\rho_1}$, il est évidemment égal à

$$\text{mod.}\,\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}.$$

Il existe donc, d'après le lemme, au moins une valeur ξ de z, correspondant à une valeur de $\varphi(z)$, représentée par un point M du segment AB, pour laquelle on a

$$\text{mod.}\,\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \geq \text{mod.}\,\frac{f(z_1)-f(z_0)}{\varphi(z_1)-\varphi(z_0)}.$$

On peut donc poser

$$(1)\qquad \frac{f(z_1)-f(z_0)}{\varphi(z_1)-\varphi(z_0)} = \lambda\,\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

λ désignant ici et *dans toute la suite de ce travail* une quantité imaginaire inconnue dont le module ne dépasse pas l'unité.

Appliquons cette formule générale au cas où l'on prend

$$\varphi(z) = (z-z_0)^p.$$

Quand le point z variera de z_0 à z_1 suivant la droite $z_0 z_1$, le point qui représente $\varphi(z)$ décrira aussi une droite. Nous sommes donc dans les conditions supposées, et, en appliquant la formule (1), nous trouvons

$$\frac{f(z_1)-f(z_0)}{(z_1-z_0)^p}=\lambda\frac{f'(\xi)}{p(\xi-z_0)^{p-1}}.$$

La valeur de ξ, qui figure dans le second membre de cette équation, est représentée par un point du segment rectiligne $z_0 z_1$; elle est donc de la forme

$$z_0+(1-\theta)(z_1-z_0),$$

θ étant réel, positif et plus petit que l'unité. On a donc

$$(2)\qquad f(z_1)-f(z_0)=\frac{\lambda(z_1-z_0)}{p(1-\theta)^{p-1}}f'[z_0+(1-\theta)(z_1-z_0)].$$

Pour $p=1$, on trouve

$$(3)\qquad f(z_1)-f(z_0)=\lambda(z_1-z_0)f'[z_0+(1-\theta)(z_1-z_0)].$$

Cette formule ne diffère de celle des accroissements finis pour les fonctions réelles que par la présence du facteur λ, de module ne dépassant pas l'unité.

Appliquons ces résultats à la fonction suivante :

$$\Psi(x)=\varphi(a+h)-\varphi(a+h-x)-x\varphi'(a+h-x)-\ldots\\ -\frac{x^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(a+h-x),$$

où $\varphi', \varphi'', \ldots \varphi^n$ désignent les dérivées de φ. On a, comme on sait,

$$\Psi'(x)=\frac{x^n}{1.2\ldots n}\varphi^{n+1}(a+h-x),$$

et, par suite, en appliquant la formule (2) et y remplaçant z_0 z_1 par les valeurs zéro et h de x,

$$\Psi(h)-\Psi(0)=\lambda\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1.2.3\ldots n.p}\varphi^{n+1}(a+\theta h),$$

ou bien

$$(4)\quad\begin{cases}\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\dfrac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\ldots+\dfrac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(a)\\ \qquad+\lambda\dfrac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1.2\ldots n.p}\varphi^{n+1}(a+\theta h).\end{cases}$$

En remplaçant a par zéro et h par x, on obtient

$$(5)\quad \varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(0)+\lambda\frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1.2\ldots n.p}\varphi^{n+1}(\theta x).$$

Ces formules ne diffèrent que par la présence de λ de celles qui sont relatives aux fonctions réelles de variables réelles.

Il est très-facile de faire des applications des résultats qui précèdent. Les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, $L(1+z)$, $(1+z)^m$ peuvent être définies directement. Leurs dérivées s'obtiennent sans difficulté. Les formules que nous proposons permettent d'étendre, pour toutes ces fonctions traitées dans les éléments, les développements en série au cas où la variable indépendante prend des valeurs imaginaires. Si l'on considère en particulier $(1+z)^m$, on retrouvera tous les résultats donnés par Abel, dans son *Mémoire sur la série du binôme*. L'étude du reste ne laisse subsister qu'un seul cas douteux, celui où le module de z est l'unité, et où en même temps la partie réelle de m est comprise entre -1 et zéro. Mais un théorème donné par Abel, précisément pour cet objet, permet de lever la difficulté, et la série du binôme se trouve ainsi établie dans toute sa généralité.

II.

Avant de passer à d'autres applications, nous allons déduire une conséquence nouvelle de la formule (1).

Considérons l'intégrale rectiligne

$$\int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx,$$

dans laquelle on suppose les limites réelles, $f(x)$ positif et $\varphi(x)$ une fonction imaginaire quelconque. Alors, en désignant par x_1 une valeur intermédiaire entre a et x, on aura, d'après la formule (1),

$$\frac{\int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^x f(x)\,dx}=\lambda\frac{f(x_1)\varphi(x_1)}{f(x_1)}=\lambda\varphi(x_1).$$

Ainsi l'on a

$$(6)\qquad \int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx = \lambda\varphi(x_1)\int_a^x f(x)\,dx.$$

C'est l'extension d'une formule connue relative aux variables réelles, et il est facile de la démontrer directement.

En effet, soit x_1 la valeur de x qui donne à $\varphi(x)$ la valeur de plus grand module μ_1. L'intégrale

$$\int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx$$

ne peut qu'être augmentée, $f(x)$ étant positif, si l'on remplace $\varphi(x)$ par μ_1. Elle est donc plus petite que

$$\mu_1\int_a^x f(x)\,dx;$$

et, comme μ_1 est le module de $\varphi(x_1)$, elle est par conséquent égale à

$$\lambda\varphi(x_1)\int_a^x f(x)\,dx,$$

λ désignant une quantité imaginaire dont le module ne peut dépasser l'unité.

Cela posé, considérons la fonction de t

$$\begin{aligned}\Psi(t) = \varphi^n(t)f(x+ht) - h\varphi^{n-1}(t)f'(x+ht)\\ + h^2\varphi^{n-2}(t)f''(x+ht) - \ldots + (-1)^n h^n\varphi(t)f^n(x+ht),\end{aligned}$$

où $\varphi(t)$ désigne un polynôme du degré n, et $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{n-1}, \varphi^n$ les dérivées successives de ce polynôme. Quant à $f(x)$, c'est une fonction quelconque réelle ou imaginaire ainsi que les variables x et h. On aura

$$\Psi'(t) = (-1)^n h^{n+1}\varphi(t)f^{n+1}(x+ht)$$

et, par suite,

$$\Psi(1) - \Psi(0) = (-1)^n h^{n+1}\int_0^1 \varphi(t)f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Si nous substituons les valeurs de $\Psi(1)$, $\Psi(0)$, nous obtenons la formule

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi^n(0)[f(x+h)-f(x)]\\ &\quad = h[\varphi^{n-1}(1)f'(x+h)-\varphi^{n-1}(0)f'(x)]\\ &\qquad - h^2[\varphi^{n-2}(1)f''(x+h)-\varphi^{n-2}(0)f''(x)]+\ldots\\ &\qquad + (-1)^{n-1}h^n[\varphi(1)f^n(x+h)-\varphi(0)f^n(x)]+\mathrm{R}_n, \end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$\mathrm{R}_n = (-1)^n h^{n+1}\int_0^1 \varphi(t)f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Cette formule servira de base à nos recherches. En faisant diverses hypothèses sur le polynôme $\varphi(t)$, nous allons obtenir la plupart des séries connues et d'autres nouvelles, avec des formes du reste applicables au cas où les variables sont imaginaires.

En prenant $\varphi(t) = (t-1)^n$, on retrouverait la série de Taylor : je n'insiste pas sur cette hypothèse déjà examinée.

Remplaçons n par $2n$ et prenons

$$\varphi(t) = t^n(t-1)^n,$$

nous aurons

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x+h)-f(x)\\ &\quad = \frac{h}{2}[f'(x+h)+f'(x)] - \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\frac{h^2}{1.2}[f''(x+h)-f''(x)]+\ldots\\ &\qquad + (-1)^{p-1}\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{2n(2n-1)\ldots(2n-p+1)}\frac{h^p}{1.2\ldots p}\\ &\qquad\quad \times[f_p(x+h)+(-1)^{p-1}f_p(x)]+\ldots\\ &\qquad + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}[f_n(x+h)+(-1)^{n-1}f_n(x)]+\mathrm{R}_{2n}, \end{aligned}\right.$$

où le reste est donné par l'équation

$$1.2\ldots 2n\,\mathrm{R}_{2n} = (-1)^n h^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n f^{2n+1}(x+ht)\,dt.$$

Or on a

$$\int_0^1 t^n(1-t)^n dt = \frac{1.2\ldots n}{(n+1)\ldots(2n+1)};$$

donc, en appliquant la formule (6), on obtient

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{\lambda . h^{2n+1}}{2n+1} \frac{f^{2n+1}(x+\theta h)}{[(n+1)\ldots 2n]^2}.$$

La formule (8) nous paraît intéressante. Elle montre en effet comment, *en calculant seulement n dérivées,* on peut obtenir une approximation de l'ordre h^{2n+1}. Par exemple, en y faisant successivement $h = 1, 2, 3$, on trouve les formules suivantes :

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{2}[f'(x) + f'(x+h)] - \frac{h^3}{12}\lambda f'''(x+\theta h),$$

$$\begin{aligned} &f(x+h) - f(x) \\ &\quad = \frac{h}{2}[f'(x) + f'(x+h)] - \frac{h^2}{12}[f''(x+h) - f''(x)] \\ &\quad\quad + \frac{h^5}{720}\lambda f^{\text{v}}(x+\theta h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f(x+h) - f(x) \\ &\quad = \frac{h}{2}[f'(x) + f'(x+h)] - \frac{h^2}{8}[f''(x+h) - f''(x)] \\ &\quad\quad + \frac{h^3}{120}[f'''(x+h) + f'''(x)] - \frac{\lambda h^7 f^7(x+\theta h)}{100.800}. \end{aligned}$$

Remarquons, de plus, que le reste est affecté d'un coefficient numérique beaucoup plus faible que celui de la série de Taylor.

Si maintenant nous revenons à la formule fondamentale et que nous prenions

$$1.2\ldots n\varphi(t) = \left(t + \frac{r}{1-r}\right)^n,$$

nous aurons

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x+h) - f(x) = &\frac{h}{1-r}[f'(x+h) - rf'(x)] \\ &- \frac{h^2}{1.2.(1-r)^2}[f''(x+h) - r^2 f''(x)] + \ldots \\ &+ \frac{(-1)^{n-1}h^n}{1.2\ldots n(1-r)^n}[f^n(x+h) - r^n f_n(x)] + R_n, \end{aligned} \right.$$

$$R_n = \frac{(-1)^n h^{n+1}}{1.2\ldots n}\int_0^1 \left(t + \frac{r}{1-r}\right)^n f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Supposons, pour fixer les idées, r positif et fractionnaire. Le polynôme $\varphi(t)$ demeurera positif. On aura

$$\int_0^1 \left(t + \frac{r}{1-r}\right)^n dt = \frac{1}{n+1}\,\frac{1-r^n}{(1-r)^n}$$

et, par suite,

$$R_n = \frac{(-1)^n \lambda h^{n+1}}{1.2\ldots n+1}\,\frac{1-r^n}{(1-r)^n} f^{n+1}(x+\theta h).$$

La formule (9), à part la forme du reste, est une conséquence de la série de Taylor. Elle sera surtout applicable quand les dérivées successives seront telles que les différences qui figurent dans la formule soient très-petites pour une valeur convenablement choisie de r.

III.

Nous allons examiner des applications d'un autre genre. La formule (7) contient $2n$ coefficients qui sont les dérivées de $\varphi(t)$ pour $t = 0$, $t = 1$. Cherchons, s'il se peut, à rendre égaux plusieurs de ces coefficients. Voyons, par exemple, s'il existe une formule dans laquelle figurent seulement les différences $f_p(x+h) - f_p(x)$.

Pour qu'il en fût ainsi pour toutes les dérivées, il faudrait que les dérivées du polynôme $\varphi(t)$ eussent la même valeur pour $t = 0$, $t = 1$, ce qui est impossible; car on aurait alors $\varphi(1+t) = \varphi(t)$, quel que soit t, résultat absurde, aucun polynôme n'étant périodique. Mais nous allons voir qu'on peut approcher beaucoup du résultat cherché et rendre égales toutes les dérivées du polynôme $\varphi(t)$ pour $t = 0$, $t = 1$, sauf l'avant-dernière. Cherchons, en effet, un polynôme jouissant de cette propriété. On aura

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1}\varphi'(0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots n-1}\varphi^{n-1}(0) + \frac{t^n\varphi^n(0)}{1.2\ldots n},$$

$$\varphi(t+1) = \varphi(1) + \frac{t}{1}\varphi'(1) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots n-1}\varphi^{n-1}(1) + \frac{t^n\varphi^n(0)}{1.2\ldots n}.$$

Pour que toutes les dérivées soient égales pour $t = 0$ et $t = 1$, sauf la $n-1^{ième}$, il faut et il suffit que la différence $\varphi(t+1) - \varphi(t)$ ne contienne que le terme en t^{n-1}. Ainsi le polynôme cherché doit satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=kx^{n-1},$$

et, comme on peut le multiplier sans inconvénient par une constante, nous écrirons

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=nx^{n-1}.$$

Or le polynôme satisfaisant à cette équation fonctionnelle est bien connu. Si x est entier, on déduit de l'équation précédente

$$\begin{gathered}\varphi(x+1)-\varphi(x)=nx^{n-1},\\ \varphi(x)-\varphi(x-1)=n(x-1)^{n-1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \varphi(2)-\varphi(1)=n1^{n-1},\\ \varphi(1)-\varphi(0)=0,\end{gathered}$$

et si l'on prend $\varphi(0)=0$, on voit que pour x entier on doit avoir

$$\varphi(x+1)=n[x^{n-1}+(x-1)^{n-1}+\ldots+2^{n-1}+1^{n-1}].$$

Donc notre polynôme cherché est, à une constante près, celui qui donne la somme des puissances semblables des nombres naturels. On voit par quelle voie naturelle nous allons être conduits à la formule de Maclaurin.

La somme des puissances semblables des nombres naturels a été donnée, pour les onze premières puissances, par Jacques Bernoulli, dans l'*Ars conjectandi*. On pourra consulter le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand (p. 352), où se trouvent établies les principales propriétés du polynôme de Bernoulli. En désignant par $\varphi_n(x)$ le polynôme de rang n, on a

$$\varphi_n(x)=x^n-\frac{n}{2}x^{n-1}+n_2B_1x^{n-2}-n_4B_3x^{n-4}+n_6B_5x^{n-6}-\ldots,$$

le dernier terme contenant toujours x en facteur; n, n_2, n_4 étant les coefficients de la puissance $n^{ième}$ du binôme et B_1, B_3, B_5,... les nombres de Bernoulli [*].

En substituant les valeurs des dérivées de $\varphi_n(x)$, pour $x=1$, $x=0$, dans la formule fondamentale, on retrouve la formule célèbre de Maclaurin

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} hf'(x) &= f(x+h) - f(x) - \frac{h}{2}[f'(x+h) - f'(x)] \\ &+ \frac{B_1 h^2}{1.2}[f''(x+h) - f''(x)] + \ldots \\ &+ (-1)^n B_{2n-3}\frac{h^{2n-2}}{1.2\ldots 2n-2}[f^{2n-2}(x+h) - f^{2n-2}(x)] + R_{2n}, \end{aligned}\right.$$

où

$$(11)\qquad R_{2n} = \frac{-h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) f^{2n+1}(x+ht)\,dt.$$

On sait que $\varphi_{2n}(t)$ garde son signe de zéro à 1. On connaît son intégrale. En appliquant la formule (6), nous aurons

$$R_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{\lambda B_{2n-1} h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n} f^{2n+1}(x+\theta h),$$

λ pouvant être supprimé dans le cas des variables réelles.

On ne paraît pas avoir remarqué que cette formule de Maclaurin est, au fond, une formule de développement pour toute fonction impaire de x. C'est ce qu'il est aisé d'établir. Remplaçons-y d'abord x par $-x$, puis h par $2x$, elle deviendra, en réunissant dans le premier membre les termes qui contenaient $f'(x)$,

$$\begin{aligned} x[f'(x) &+ f'(-x)] \\ &= f(x) - f(-x) + \frac{B_1(2x)^2}{1.2}[f''(x) - f''(-x)] + \ldots \\ &+ (-1)^n \frac{B_{2n-3}(2x)^{2n-2}}{1.2\ldots 2n-2}[f^{2n-2}(x) - f^{2n-2}(-x)] + R_{2n}, \end{aligned}$$

où

$$R_{2n} = -\frac{(2x)^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) f^{2n+1}(-x+2xt)\,dt.$$

---

[*] La notation de ces nombres n'est pas bien fixée; plusieurs géomètres les désignent par d'autres indices B_1, B_2, B_3,....

Si nous changeons, dans le reste, t en $1-t$, et si nous nous rappelons que $\varphi_{2n}(t) = \varphi_{2n}(1-t)$, nous aurons également

$$R_{2n} = \frac{-(2x)^{2n+1}}{1.2\ldots2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) f^{2n+1}(x-2xt)\,dt$$

et, en faisant la demi-somme des deux expressions de R_{2n},

$$R_{2n} = -\frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1.2\ldots2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)[f^{2n+1}(x-2xt)+f^{2n+1}(-x+2xt)]dt.$$

Les formules précédentes ne contiennent plus que la seule fonction $f(x)-f(-x)$, qui est impaire, et ses dérivées. Remplaçons $f(x)-f(-x)$ par le seul symbole $f(x)$, désignant une fonction impaire, nous aurons

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} xf'(x) &= f(x) + \frac{B_1}{1.2}(2x)^2 f''(x)+\ldots \\ &\quad + (-1)^n \frac{B_{2n-3}(2x)^{2n-2}}{1.2\ldots2n-2} f^{2n-2}(x) + R_{2n}, \end{aligned}\right.$$

où

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} R_{2n} &= \frac{-2^{2n}x^{2n+1}}{1.2\ldots2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) f^{2n+1}(-x+2xt)\,dt, \\ R_{2n} &= (-1)^{n+1}\frac{\lambda\, 2^{2n}B_{2n-1}x^{2n+1}}{1.2\ldots2n} f^{2n+1}(\theta x). \end{aligned}\right.$$

Prenons, par exemple, $f(x) = \sin x$. Nous aurons, en divisant tous les termes par $\sin x$,

$$x\cot x = 1 - \frac{B_1}{1.2}(2x)^2 - \frac{B_3}{1.2.3.4}(2x)^4\ldots$$
$$- \frac{B_{2n-3}(2x)^{2n-2}}{1.2\ldots2n-2} - \frac{2^{2n}\lambda x^{2n+1}}{1.2\ldots2n} B_{2n-1}\frac{\cos x\theta}{\sin x}.$$

On sait que la série est convergente tant que x est réelle et inférieure à π. Quant à l'erreur commise, elle est toujours égale au terme auquel on s'arrête multiplié par

$$\frac{\lambda x \cos x\theta}{\sin x}.$$

On voit que, si x est réelle, l'erreur commise est plus petite que le premier terme négligé multiplié par $\frac{x}{\sin x}$.

Si l'on remplace x par $\frac{x}{2}\sqrt{-1}$, on trouve

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_3 x^2}{1.2.3.4}+\ldots.$$

C'est le résultat de Cauchy, car la première des formules (13), donnant l'erreur commise, montre qu'elle est toujours de même signe que le premier terme négligé. Elle est donc par conséquent inférieure à ce terme.

On fait remarquer, d'ordinaire, que la série de Maclaurin est rarement convergente. On peut préciser cette affirmation un peu vague de la manière suivante. On sait que

$$\frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots 2n}=2^{2n-1}\pi^{2n}(1+\varepsilon_n),$$

ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il suit de là que le terme général de la série (12) est de la forme

$$(-1)^{n+1}\frac{1+\varepsilon_n}{2}(4x\pi)^{2n}f^{2n}(x).$$

Dans le cas où la série de Maclaurin est convergente, il doit tendre vers zéro. On doit donc avoir

$$(4x\pi)^{2n}f^{2n}(x)=u_n,$$

u_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il suit de là que la série qui développe

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}=\sum\frac{f^{2n}(x)h^{2n}}{1.2\ldots 2n}=\sum\frac{u_n}{1.2\ldots 2n}\left(\frac{h}{4x\pi}\right)^{2n}$$

sera convergente pour toutes les valeurs de h. Ainsi :

Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que la série de Maclaurin soit convergente, c'est que la fonction $f(x+h)+f(x-h)$ soit développable en série convergente ordonnée suivant les puissances *de h pour toutes les valeurs de h, et par conséquent qu'elle ne devienne ni infinie, ni indéterminée pour aucune valeur finie de la variable h.*

En revenant aux notations habituelles et à la formule (10), on voit qu'elle ne sera convergente que si la fonction

$$f(x+h+k)+f(x+h-k)-f(x+k)-f(x-k)$$

est développable en série convergente, suivant les puissances de k, dans toute l'étendue du plan, et par conséquent ne devient jamais infinie ou indéterminée quand k varie.

Ainsi la série de Maclaurin pourra bien être convergente (et il est facile de voir qu'elle le sera) pour des fonctions entières de e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sin f(x)$, $e^{f(x)} f(x)$ désignant un polynôme; mais elle sera divergente pour les fractions rationnelles, pour $\operatorname{tang} x$, $\frac{1}{\sin x}$, ...

IV.

Revenons à la formule (7), qui nous a servi de point de départ, et choisissons le polynôme qui y figure, en le soumettant à d'autres conditions. Exigeons, par exemple, que, dans la formule (7), $f_p(x)$ et $f_p(x+h)$ aient le même coefficient et n'entrent que par leur somme. Le polynôme $\Psi_n(x)$, qui permettra d'obtenir ce résultat, devra satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$\Psi_n(x+1)+\Psi_n(x)=2x^n.$$

Cette équation, différentiée p fois, donne en effet, pour $x=0$,

$$\Psi_n^p(1)=-\Psi_n^p(0).$$

Il reste à obtenir le polynôme satisfaisant à l'équation fonctionnelle proposée. On l'exprime facilement au moyen de la fonction $\varphi_n(x)$ de Jacques Bernoulli, employée dans l'article précédent. En effet, si l'on pose

$$(14)\qquad \Psi_n(x)=\frac{2^n}{n+1}\left[\varphi_{n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)-\varphi_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

on a un polynôme d'ordre n qui, comme on le vérifie aisément, satisfait à l'équation proposée. Si l'on remplace φ_{n+1} par son expression connue comme dérivée $n^{ième}$, on trouvera aussi

$$\Psi_n(x) = \frac{2}{n+1} \frac{d^{n+1}}{du^{n+1}} \frac{ue^{xu}}{e^u+1} \quad \text{pour} \quad u = 0.$$

Or on sait que l'on a

$$\frac{u}{e^u+1} = \frac{u}{e^u-1} - \frac{2u}{e^{2u}-1} = \frac{u}{2} - \frac{B_1 u^2}{1.2}(2^2-1) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots 2n}(2^{2n}-1)u^{2n} + \ldots.$$

En multipliant par e^{xu} et prenant la dérivée $n+1^{ième}$, qui sera le coefficient de u^{n+1} multiplié par $1.2.3\ldots n+1$, on trouvera

$$\Psi_n(x) = x^n - \frac{2B_1}{1.2}(2^2-1)nx^{n-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{2B_{2p-1}(2^{2p}-1)}{1.2\ldots 2p} n(n-1)\ldots(n-2p+2)x^{n-2p+1} + \ldots.$$

On déduit de là les dérivées de Ψ_n pour $x = 0$, et, en substituant dans la formule (7), on obtient

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x+h) - f(x) \\ & = \frac{2B_1(2^2-1)}{1.2} h[f'(x) + f'(x+h)] \\ & - \frac{2B_2(2^4-1)h^3}{1.2.3.4}[f'''(x) + f'''(x+h)] + \ldots \\ & + (-1)^{n-1} \frac{2B_{2n-1}(2^{2n}-1)h^{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}[f^{2n-1}(x) + f^{2n-1}(x+h)] + R_{2n}, \end{aligned}\right.$$

où

$$R_{2n} = \frac{h^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n} \int_0^1 \Psi_{2n}(t) f^{2n+1}(x+ht)\,dt.$$

Remplaçons $\Psi_{2n}(t)$ par son expression (14), nous aurons

$$R_{2n} = \frac{2^{2n}h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n} \int_0^1 \left[\varphi_{2n+1}\left(\frac{t+1}{2}\right) - \varphi_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)\right] f_{2n+1}(x+ht)\,dt,$$

expression que l'on ramène facilement, par des changements de variables, à la forme

$$R_{2n} = \frac{-(2h)^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n}\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{2n-1}(t)[f^{2n+1}(x+2ht)+f^{2n+1}(x+h-2ht)]dt.$$

Le polynôme $\varphi_{2n+1}(t)$ conserve son signe entre zéro et $\frac{1}{2}$, et son intégrale entre ces limites est, comme on sait,

$$(-1)^{n-1}\frac{2^{2n+2}-1}{(n+1)2^{2n+2}}B_{2n+1}.$$

On a donc

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{\lambda h^{2n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+2}[f^{2n+1}(x+h\theta)+f^{2n+1}(x+h-h\theta)].$$

La formule (15) est due à Boole, qui l'a donnée, je crois, sans se préoccuper du reste. Comme la formule de Maclaurin, on peut la transformer de manière qu'elle ne contienne qu'une fonction impaire de x. Il suffit d'y remplacer x par $-\frac{h}{2}$, h par $2x$, et $f(x)-f(-x)$ par $f(x)$. Elle devient alors

$$(16)\quad \begin{cases} f(x) = \frac{2B_1}{1.2}(2^2-1)2xf'(x) - \frac{2B_3(2^4-1)(2x)^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\frac{2B_{2n-1}(2^{2n}-1)(2x)^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}f^{2n-1}(x)+R_{2n}, \end{cases}$$

où

$$R_{2n} = (-1)^n\frac{\lambda B_{2n+1}(2^{2n+2}-1)(2x)^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+2}f^{2n+1}(\theta x).$$

Comme vérification, prenons $f(x) = \sin x$. Nous trouverons, en divisant par $\cos x$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} x = {} & \frac{2B_1(2^2-1)}{1.2}2x + \frac{2B_3(2^4-1)}{1.2.3}(2x)^3+\ldots \\ & + \frac{2B_{2n-1}(2^{2n}-1)(2x)^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}+R_{2n}, \end{aligned}$$

$$R_{2n} = \frac{(2x)^{2n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+2}\,\frac{\lambda\cos\theta x}{\cos x}.$$

Ce reste tend vers zéro toutes les fois que le module de x est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, ce qui est conforme aux résultats connus. En remplaçant x par $\frac{x}{2}\sqrt{-1}$, on trouve

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2B_1(2^2 - 1)}{1.2} x - \frac{2B_3(2^4 - 1)}{1.2.3.4} x^3 + \ldots,$$

série convergente tant que le module de x est inférieur à π. La forme, du reste, nous apprend d'ailleurs que, *dans tous les cas*, l'erreur est de même signe que le premier terme négligé, et par conséquent qu'elle est inférieure à ce terme.

La convergence de la formule de Boole donne lieu aux mêmes remarques que celle de la série de Maclaurin.

V.

Supposons maintenant que, dans la formule (7), on prenne pour $\varphi(x)$ un polynôme satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(17) \qquad \varphi(x+1) - r\varphi(x) = \frac{(1-r)x^n}{1.2\ldots n},$$

où nous supposerons, pour plus de précision, r positif et fractionnaire.

On aura, en différentiant p fois,

$$\varphi_p(1) = r\varphi_p(0),$$

et notre formule ne contiendra plus que les différences

$$rf^p(x+h) - f^p(x).$$

Voyons d'abord comment on résoudra l'équation fonctionnelle (17).

Posons

$$(18) \qquad 1.2\ldots n\varphi(x+1) = \frac{d^n}{du^n}\frac{(1-r)e^{xu}}{1-re^{-u}} \quad \text{pour} \quad u = 0,$$

on trouvera

$$\varphi(x+1) - r\varphi(x) = \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{du^n}(1-r)e^{xu} \quad \text{pour} \quad u = 0,$$
$$= \frac{1-r}{1.2\ldots n}x^n.$$

Donc le polynôme défini par la formule (18) sera le polynôme cherché. Proposons-nous de trouver son expression développée. Soit

$$(19) \qquad \frac{1-r}{1-re^{-u}} = 1 - a_1\frac{u}{1} + a_2\frac{u^2}{1.2} - a_3\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots;$$

on verra facilement que a_p est de la forme

$$a_p = \frac{f_p(r)}{(1-r)^p},$$

où $f_p(r)$ est un polynôme dont tous les coefficients sont positifs. Cela résultera d'ailleurs de la suite de notre étude.

Si dans la formule (19) on change u en $-u$, r en $\frac{1}{r}$ et que l'on pose $b_p = \dfrac{f_p\left(\frac{1}{r}\right)}{\left(1-\frac{1}{r}\right)^p}$, on aura

$$\frac{r-1}{r-e^u} = 1 + b_1\frac{u}{1} + \ldots + b_p\frac{u^p}{1.2\ldots p} + \ldots;$$

multiplions par r et retranchons de la formule (19), nous trouvons

$$0 = \sum\left[rb_p - (-1)^p a_p\right]\frac{u^p}{1.2\ldots p},$$

c'est-à-dire

$$rb_p = (-1)^p a_p, \quad f_p(r) = r^p f_p\left(\frac{1}{r}\right).$$

Ainsi le polynôme $f_p(r)$ est réciproque et de degré p.

Multiplions la formule (19) par le développement de e^{xu}, et prenons le coefficient de u^n, nous aurons $\varphi(x+1)$. On trouve ainsi

$$(20) \qquad \varphi_n(x+1) = \frac{1}{1.2\ldots n}(x^n - n_1 a_1 x^{n-1} + n_2 a_2 x^{n-2} - \ldots).$$

Le second membre n'ayant que des variations $\varphi(1-x)$ n'est jamais nul si x est positif; donc le polynôme $\varphi(x)$ conserve son signe de zéro à 1.

L'expression du polynôme étant trouvée, la formule (7) devient

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} f(x+h)-f(x) = &- a_1 h\left[f'(x+h)-\frac{1}{r}f'(x)\right] \\ &- a_2\frac{h^2}{1.2}\left[f''(x+h)-\frac{1}{r}f''(x)\right]-\ldots \\ &- a_n\frac{h^n}{1.2\ldots n}\left[f^n(x+h)-\frac{1}{r}f^n(x)\right]+\mathrm{R}_n, \end{aligned}\right.$$

où

$$\mathrm{R}_n = (-1)^n h^{n+1}\int_0^1 \varphi_n(t) f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Le polynôme $\varphi_n(t)$ ne change pas de signe entre zéro et 1, et la formule (20) montre d'ailleurs que $\varphi_n(t)$ est la dérivée de $\varphi_{n+1}(t)$. On a donc

$$\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt = \varphi_{n+1}(1)-\varphi_{n+1}(0);$$

et comme, en vertu de l'équation fonctionnelle,

$$\varphi_{n+1}(0) = \frac{1}{r}\varphi_{n+1}(1),\quad \varphi_{n+1}(1) = (-1)^{n+1}\frac{a_{n+1}}{1.2\ldots n+1},$$

on a

$$(22)\qquad \mathrm{R}_n = -\frac{1-r}{r}\,\frac{a_{n+1}h^{n+1}}{1.2\ldots n+1}\,f^{n+1}(x+\theta h).$$

Telle est l'expression de l'erreur commise.

Examinons ces coefficients a_n fonctions de r qui figurent dans le développement. On peut d'abord les développer en séries qui mettent en évidence leurs propriétés. On a

$$\frac{1-r}{1-re^{-u}} = 1-r+\sum_p (1-r)r^p e^{-pu}.$$

En prenant le coefficient de u^n, on trouve

$$a_n = 1^n r^n + (2^n-1^n)r^2 + (3^n-2^n)r^3+\ldots.$$

Ce développement montre bien qu'ils sont positifs, croissants avec r et avec n; si nous multiplions cette série par $(1-r)^n$ nous aurons l'expression finie des coefficients a_n. On trouve ainsi

$$a_n(1-r)^n = r + \alpha_1 r^2 + \ldots + \alpha_{n-1} r^n$$

où

$$\alpha_{p-1} = p^n - (n+1)_1(p-1)^n + (n+1)_2(p-2)^n + \ldots \\ + (-1)^{p-1}(n+1)_{p-1} 1^n,$$

$(n+1)_k$ désignant toujours le coefficient de rang $(k+1)$ de la puissance $n+1^{\text{ième}}$ du binôme.

Voici le calcul fait des n coefficients :

$$\begin{aligned}
(1-r)\, a_1 &= r,\\
(1-r)^2 a_2 &= r + r^2,\\
(1-r)^3 a_3 &= r + 4r^2 + r^3,\\
(1-r)^4 a_4 &= r + 11r^2 + 11r^3 + r^4,\\
(1-r)^5 a_5 &= r + 26r^2 + 66r^3 + 26r^4 + r^5,\\
(1-r)^6 a_6 &= r + 57r^2 + 302r^3 + 302r^4 + 57r^5 + r^6.
\end{aligned}$$

Ce calcul se fait avec une extrême facilité. Les coefficients des polynômes sont les n différences $n^{\text{ièmes}}$ du tableau

$$\ldots 0\;0\;0\;1^n\;2^n\;3^n \ldots n^n$$

prolongé vers la gauche avec des zéros autant qu'il est nécessaire pour obtenir n différences $n^{\text{ièmes}}$.

Les numérateurs des quantités a_n peuvent être définis par la formule

$$\frac{1-r}{1-re^{u(1-r)}} = \sum \frac{f_k u^k}{1.2\ldots k}.$$

Le premier membre pour $r=1$ se réduit à $\frac{1}{1-u}$. Ainsi la somme des coefficients de f_k est $1.2\ldots k$, ce qu'il est facile de vérifier sur le tableau précédent.

Je ne terminerai pas cet article sans montrer que les polynômes

$\varphi_n(x)$ considérés ici donnent la solution d'un problème assez intéressant :

x étant un nombre entier, proposons-nous de trouver la somme

$$x^n + r(x-1)^n + r^2(x-2)^n + \ldots.$$

A cet effet, dans l'équation fonctionnelle (17), remplaçons successivement x par x, $x-1$, $x-2, \ldots$, nous aurons

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1) - r\varphi(x) &= (1-r)x^n,\\
\varphi(x) - r\varphi(x-1) &= (1-r)(x-1)^n,\\
\varphi(x) - r\varphi(1) &= (1-r)\,1^n,
\end{aligned}$$

et, par suite, en multipliant ces équations par $1, r, r^2, \ldots, r^{x-1}$, et les ajoutant

$$(23)\qquad \frac{\varphi_n(x+1) - \varphi_n(1)\,r^x}{1-r} = x^n + r(x-1)^n + r^2(x-2)^n + \ldots + r^{x-1}\,1^n.$$

Ainsi la somme qui figure dans le second membre s'exprime par un de nos polynômes augmenté d'un terme en r^x. Ce résultat nous paraît nouveau; il justifierait une étude plus détaillée des polynômes $\varphi_n(x)$.

VI.

Enfin, dans une dernière application, nous emploierons une suite de polynômes qui sont les dérivées les uns des autres et qui sont des cas particuliers de la série hypergéométrique. Pour que notre formule fondamentale donne naissance à un développement infini, il est indispensable que les dérivées des mêmes degrés soient égales pour $t=0$ et $t=1$ pour tous les polynômes employés. Cette condition sera remplie si les polynômes sont les dérivées les uns des autres.

Considérons l'équation différentielle

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [1-h-n+x(n+h+k-2)]\frac{dy}{dx}&\\ - n(n+h+k-1)y = 0.&\end{aligned}\right.$$

Cette équation admet comme intégrale le polynôme

$$(25)\qquad y_n = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+h+k-2)} x^{n+h}(1-x)^{n+k}\frac{d^n}{dx^n}x^{-h}(1-x)^{-k},$$

où l'on a choisi un coefficient tel que, dans le développement, le coefficient de x^n soit $\frac{1}{1.2\ldots n}$. On vérifie sans peine, en différentiant l'équation (24), que la dérivée de y_n satisfait à une équation qui n'en diffère que par le changement de n en $n-1$. Ainsi l'on a une suite de polynômes

$$y_0,\ y_1, \ldots,\ y_n$$

qui sont les dérivées les uns des autres, le premier étant égal à 1.

Si, dans la formule (25), on développe la dérivée $n^{ième}$ par la formule de Leibnitz, on trouvera facilement, en faisant $x=0$, $x=1$, les valeurs de y_n dans ces deux cas. On a ainsi

$$y_n = \frac{h(h+1)\ldots(h+n-1)(-1)^n}{1.2\ldots n(h+k)\ldots(h+k+n-1)} \quad \text{pour } x=0,$$

$$y_n = \frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n(h+k)\ldots(h+k+n-1)} \quad \text{pour } x=1.$$

Enfin on reconnaît aisément, d'après tout ce que l'on sait sur l'équation différentielle (24), que l'on peut poser

$$(27)\qquad y_n = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h)\Gamma(k)\Gamma(n+1)}\int_0^1 z^{h-1}(1-z)^{k-1}(x-z)^n\,dz.$$

Cette formule n'a toutefois de sens que si l'on suppose h et k positifs ce que nous ferons dans la suite.

Elle montre que les polynômes de rang pair n'ont pas de racines réelles; par conséquent, ceux de rang impair, dérivées des précédents, n'en ont qu'une, évidemment comprise entre 0 et $+1$.

Enfin, pour compléter l'étude de ces polynômes, cherchons une fonction génératrice. Or considérons la fonction

$$F = (x+u)^{-h}(1-x-u)^{-k},$$

et développons-la suivant les puissances de u. Nous aurons

$$F = \sum \frac{u^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}x^{-h}(1-x)^{-k}.$$

Posons $u = tx(1-x)$. On aura

$$F = x^{-h}(1-x)^{-k}(1+t-tx)^{-h}(1-tx)^{-k}$$
$$= \sum \frac{t^n x^n (1-x)^n}{1.2\ldots n} \frac{d^n}{dx^n} x^{-h}(1-x)^{-k},$$

ou bien, en divisant par $x^{-h}(1-x)^{-k}$,

$$(28)\quad \begin{cases} (1+t-tx)^{-h}(1-tx)^{-k} = \sum \frac{t^n}{1.2\ldots n} x^{n+h}(1-x)^{n+k} \frac{d^n}{dx^n} x^{-h}(1-x)^{-k} \\ \qquad = \Sigma t^n (n+h+k-1)\ldots(h+k) y_n. \end{cases}$$

Ainsi la fonction

$$(1+t-tx)^{-h}(1-tx)^{-k}$$

est la fonction génératrice de nos polynômes.

Substituons le polynôme y_n dans la formule (7) et, pour plus de précision, faisons $h = k = \frac{1}{2}$. Cette formule deviendra

$$(29)\quad \begin{cases} f(x+h) - f(x) = \frac{h}{2}[f'(x) + f'(x+h)] \\ \qquad - \frac{1.3}{(1.2)^2} \frac{h^2}{2^2}[f''(x+h) - f''(x)] + \ldots \\ \qquad + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{(1.2.3\ldots n)^2} \frac{h^n}{2^n} \\ \qquad \times [f^n(x+h) + (-1)^n f^n(x)] + R_n, \end{cases}$$

$$R_n = (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 y_n(t) f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Supposons n pair. On trouvera pour l'expression approchée du reste

$$(30)\quad R_n = \frac{\lambda h^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{1.3.5\ldots 2n+1}{(1.2.3\ldots n+1)^2} [f^{n+1}(x+h-\theta h) + f^{n+1}(x+\theta h)].$$

La formule (29) est sensiblement plus convergente que la série de Taylor.

On pourrait en obtenir de semblables en très-grand nombre.

Étude sur la théorie des résidus cubiques;

Par le P. PEPIN, S. J.

1. Il n'est pas sans fruit de rechercher quelle a pu être l'origine des grandes découvertes, comment l'esprit des inventeurs a pu s'y trouver conduit par l'étude des travaux antérieurs. Quand même cette divination ferait connaître, non pas la voie suivie par le savant dont on étudie les œuvres, mais une voie différente qu'il aurait pu suivre, elle n'aurait pas moins l'avantage d'exercer l'esprit d'invention et de manifester les liens cachés qui rattachent entre elles les diverses parties d'une même science. En étudiant les points principaux de la théorie des résidus cubiques, nous trouverons une formule dont la généralisation est le théorème fondamental du Mémoire publié par Cauchy dans le *Bulletin de Férussac* (1829) et développé plus tard dans le tome XVII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*. D'ailleurs, ce résultat n'est pas le seul capable de recommander ce travail aux géomètres; ils y trouveront, je l'espère, les théorèmes les plus remarquables de la théorie des résidus cubiques démontrés d'une manière plus simple que partout ailleurs.

2. Soit p un nombre premier $3\varpi + 1$. Nous désignerons par t une racine primitive de p, et nous poserons $t^3 \equiv g \pmod{p}$, en sorte que g sera une racine primitive de la congruence $x^\varpi \equiv 1 \pmod{p}$. Tous les nombres entiers non divisibles par p seront congrus respectivement aux termes des trois suites

$$\begin{array}{llllll}
(0) & 1, & g, & g^2, & \ldots, & g^{\varpi-1}, \\
(1) & t, & tg, & tg^2, & \ldots, & tg^{\varpi-1}, \\
(2) & t^2, & t^2g, & t^2g^2, & \ldots, & t^2g^{\varpi-1}.
\end{array}$$

Nous appellerons *résidus* de classe (i) relativement au nombre premier p et à la base t celles des racines de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 (\text{mod.} p)$ dont les indices relativement à la base t sont de la forme $3x+i$; tous ces résidus de classe (i) sont congrus aux différents termes de la suite (i). Les résidus cubiques du nombre premier p sont donc pour nous les résidus de la classe (0).

3. Nous adopterons pour les résidus cubiques une notation analogue à celle que Gauss a employée dans ses Mémoires sur les résidus biquadratiques; nous désignerons par la lettre α diversement accentuée les résidus cubiques de p, par β, β', ... les résidus de classe (1), et par γ, γ', ... les résidus de classe (2). Si nous ajoutons une unité à chacun des termes $\alpha, \alpha', \alpha''$, ..., l'une des sommes sera p, car $p-1$ est résidu cubique de p; les autres sommes seront des résidus de classe (0), (1) ou (2). Désignons par n, n', n'' les nombres des sommes $1+\alpha$ qui appartiennent respectivement à ces trois classes; ces nombres sont égaux à ceux des solutions des trois congruences

$$(a) \qquad 1+\alpha+\alpha' \equiv 0, \quad 1+\alpha+\beta \equiv 0, \quad 1+\alpha+\gamma \equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

et ils vérifient évidemment la formule

$$(4) \qquad 1+n+n'+n'' = \varpi.$$

Si l'on ajoute de même une unité aux résidus de classe (1), toutes les sommes appartiennent à l'une des trois classes (0), (1) ou (2). Le nombre des sommes égales à des résidus cubiques est évidemment le même que celui des solutions de la congruence $1+\beta+\alpha \equiv 0$ ou $1+\alpha+\beta \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$; ce nombre est n'. Le nombre de celles qui satisfont à la congruence $(1+\beta)+\beta' \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$ est égal à n''; car la racine de la congruence $\alpha\beta' \equiv 1 \ (\text{mod. } p)$ est un nombre γ, et le produit $\gamma\beta$ est un nombre α, en sorte que la congruence précédente, multipliée par γ, devient $\gamma+\alpha+1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$, d'où l'on voit que le nombre de ses solutions est n''. Désignons par n_1 le nombre des solutions de la congruence $1+\beta+\gamma \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$; on aura

$$n'+n''+n_1 = \varpi.$$

puisque chacune des ϖ sommes $1+\beta$ est un nombre α, un nombre β ou un nombre γ; et, en comparant cette relation avec la formule (4), on déduit $n_1 = n+1$. Ainsi les nombres de solutions des trois congruences

$$(b) \quad 1+\beta+\alpha\equiv 0, \quad 1+\beta+\beta'\equiv 0, \quad 1+\beta+\gamma\equiv 0 \pmod{p}$$

sont respectivement n', n'', $n+1$.

Enfin, si l'on augmente d'une unité les termes γ, les ϖ sommes obtenues satisferont respectivement aux trois congruences

$$(c) \quad 1+\gamma+\alpha\equiv 0, \quad 1+\gamma+\beta\equiv 0, \quad 1+\gamma+\gamma'\equiv 0 \pmod{p};$$

les deux premières ne sont que la troisième des équations (a) et la troisième des équations (b); les nombres de leurs solutions sont donc respectivement n'', $n+1$. En désignant par n_2 le nombre des solutions de la congruence $1+\gamma+\gamma'\equiv 0 \pmod{p}$, on a

$$n''+n+1+n_2=\varpi,$$

et la comparaison de ce résultat et de la formule (4) donne $n_2=n'$. Ainsi les nombres de solutions des congruences (c) sont respectivement n'', $n+1$, n'.

4. Proposons-nous de déterminer la somme des puissances d'une racine primitive θ de l'équation binôme $x^p=1$, qui ont pour exposants les résidus cubiques de p. Posons pour cela

$$s=\Sigma\theta^{g^i}, \quad s'=\Sigma\theta^{tg^i}, \quad s''=\Sigma\theta^{t^2g^i}, \quad (i=0,1,2,\ldots \varpi-1).$$

Nous aurons

$$s^2=\Sigma\theta^{g^i}\Sigma\theta^{g^i}=\Sigma\Sigma\theta^{g^i+g^{i'}}, \quad (i \text{ et } i'=0,1,2,\ldots,\varpi-1);$$

or, parmi les diverses combinaisons des valeurs de i et de i', les unes rendent l'exposant $g^i+g^{i'}$ divisible par p : ce sont les solutions de la congruence

$$i-i'\equiv \tfrac{1}{2}\varpi \pmod{\varpi},$$

car

$$g^i + g^{i'} = g^{i'}(g^{i-i'} + 1) \quad \text{et} \quad g^{\frac{1}{2}\varpi} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Or on peut donner à i' l'une quelconque des ϖ valeurs $0, 1, 2, \ldots, \varpi - 1$; à chacune de ces valeurs correspond pour i une valeur unique, déterminée par l'une des équations

$$i = \tfrac{1}{2}\varpi + i' \quad \text{ou} \quad i = i' - \tfrac{1}{2}\varpi,$$

suivant que i' sera inférieur ou supérieur à $\frac{1}{2}\varpi$. Les autres combinaisons des valeurs de i et de i' rendent l'exposant $g^i + g^{i'}$ équivalent à des résidus des trois classes (0), (1) ou (2). Le nombre de ces exposants qui sont congrus à $g^l \pmod{p}$ est le même que celui des solutions de la congruence $g^{i-l+\frac{1}{2}\varpi} + g^{i'-l+\frac{1}{2}\varpi} + 1 \equiv \alpha + \alpha' + 1 \equiv 0 \pmod{p}$: ce nombre est donc égal à n. Ainsi, dans notre somme double $\Sigma\Sigma\theta^{g^i+g^{i'}}$, tous les termes θ^{g^l} de s entrent le même nombre de fois n.

Le nombre de fois que la même somme double s^2 renferme le terme θ^{tg^l} est égal au nombre des solutions de la congruence

$$g^i + g^{i'} \equiv tg^l \quad \text{ou} \quad 1 + g^{i-i'} + tg^{l-i'+\frac{\varpi}{2}} \equiv 1 + \alpha + \beta \equiv 0 \pmod{p};$$

ce nombre est n'. De même le nombre des exposants $g^i + g^{i'}$ qui sont équivalents à un même résidu de classe (2) est égal à celui des solutions de la congruence

$$1 + g^{i-i'} + t^2 g^{l-i'+\frac{1}{2}\varpi} \equiv 1 + \alpha + \gamma \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ce nombre est n''; donc

(5) $$s^2 = \varpi + ns + n's' + n''s''.$$

5. En suivant la même méthode, on trouve

(6) $$ss' = \Sigma\theta^{g^i+tg^{i'}} = n's + n''s' + (n+1)s'',$$

car aucun des exposants $g^i + tg^{i'}$ n'est divisible par p, et le nombre de ceux qui se réduisent à un résidu donné est le même pour tous les résidus de la même classe, savoir n' pour la classe (0), n'' pour la classe (1), et $n+1$ pour la classe (2). Il est égal à n' pour la classe (0), car la congruence $g^i + tg^{i'} \equiv g^l$ (mod. p) revient à la congruence

$$1 + tg^{i'-i} + g^{l-i+\frac{1}{2}\varpi} \equiv 1 + \beta + \alpha \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

Or le nombre des solutions de cette congruence est n'. On vérifie de même les coefficients n'' et $n+1$ de s' et de s''.

Dans les équations (5) et (6), on peut remplacer θ par θ^t; cette substitution change s en s', s' en s'' et s'' en s. On obtiendra ainsi les deux groupes de formules

$$(7) \quad \begin{cases} s^2 = \varpi + ns + n's' + n''s'', \\ s'^2 = \varpi + ns' + n's'' + n''s, \\ s''^2 = \varpi + ns'' + n's + n''s', \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} ss' = n's + n''s' + (n+1)s'', \\ s's = n's'' + n''s + (n+1)s, \\ s''s'' = n's' + n''s'' + (n+1)s'. \end{cases}$$

6. Considérons la fonction Θ_h de Cauchy, définie par la formule

$$\Theta_h = \theta + \rho^h\theta^t + \rho^{2h}\theta^{t^2} + \ldots + \rho^{(p-2)h}\theta^{t^{p-2}} = \Sigma\rho^{ih}\theta^{t^i} \ (i = 0, 1, 2, \ldots, p-2),$$

où ρ est une racine cubique imaginaire de l'unité.

On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\Theta_h = s + \rho^h s' + \rho^{2h} s''.$$

Toutes les puissances de cette fonction peuvent se réduire à des fonctions linéaires des trois sommes s, s', s'' au moyen des formules (7) et (8). Formons d'abord son carré :

$$\begin{aligned} \Theta_h^2 &= s^2 + \rho^{2h}s'^2 + \rho^h s''^2 + 2\rho^h ss' + 2\rho^{2h} ss'' + 2s's'' \\ &= (s^2 + 2s's'') + \rho^{2h}(s'^2 + 2ss'') + \rho^h(s''^2 + 2ss'). \end{aligned}$$

Or on déduit des formules (7) et (8)

$$\begin{aligned} s^2 + 2s's'' &= \varpi + (3n+2)s + 3n's' + 3n''s'', \\ s'^2 + 2s''s &= \varpi + (3n+2)s' + 3n's'' + 3n''s, \\ s''^2 + 2ss' &= \varpi + (3n+2)s'' + 3n's + 3n''s \end{aligned}$$

On a donc, eu égard à la relation $1 + \rho^h + \rho^{2h} = 0$,

$$(9)\quad \Theta_h^2 = (3n + 2 + 3n'\rho^h + 3n''\rho^{2h})(s + \rho^{2h}s' + \rho^h s'') = \mathrm{R}_{h,h}\Theta_{2h}.$$

Dans toutes ces formules, h est supposé non divisible par 3; il nous suffit de lui attribuer les deux valeurs 1 et 2, ce qui donne

$$\Theta_1^2 = \mathrm{R}_{1,1}\Theta_2,\quad \Theta_2^2 = \mathrm{R}_{2,2}\Theta_4 \quad \text{et} \quad (\Theta_1\Theta_2)^2 = \mathrm{R}_{1,1}\mathrm{R}_{2,2}\Theta_2\Theta_4.$$

D'ailleurs $\Theta_4 = \Theta_1$; on a donc

$$\Theta_1\Theta_2 = \mathrm{R}_{1,1}\mathrm{R}_{2,2}.$$

Or si l'on prend $\rho = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, on a

$$\mathrm{R}_{1,1} = \tfrac{1}{2}\left[6n + 4 - 3(n' + n'') + 3\sqrt{-3}\,(n' - n'')\right],$$
$$\mathrm{R}_{2,2} = \tfrac{1}{2}\left[6n + 4 - 3(n' + n'') - 3\sqrt{-3}\,(n' - n'')\right],$$

$$(10)\quad 4\mathrm{R}_{1,1}\mathrm{R}_{1,2} = [6n - 3(n' + n'' - 1) + 1]^2 + 27(n' - n'')^2.$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\Theta_1\Theta_2 &= (s + \rho s' + \rho^2 s'')(s + \rho^2 s' + \rho s'')\\ &= s^2 + s'^2 + s''^2 - ss' - ss'' - s's'''\\ &= 3\varpi - (s + s' + s'') = 3\varpi + 1 = p.\end{aligned}$$

On déduit donc de la formule (10) et de l'équation $\Theta_1\Theta_2 = \mathrm{R}_{1,1}\mathrm{R}_{2,2}$

$$(11)\quad 4p = [6n - 3(n' + n'' - 1) + 1]^2 + 27(n' - n'')^2.$$

Posons

$$(12)\quad 6n - 3(n' + n'' - 1) + 1 = \mathrm{L},\quad n' - n'' = \mathrm{M};$$

L^2 et M^2 sont connus au moyen de l'équation indéterminée

$$(13)\quad 4p = \mathrm{L}^2 + 27\mathrm{M}^2,$$

qui n'admet qu'une seule solution en nombres entiers et positifs. Le signe de L est déterminé par la congruence $\mathrm{L} \equiv 1 \pmod{3}$; celui de M reste indéterminé, et l'on reconnaît aisément que cette indétermination est nécessaire, puisque le changement de la base t suffit pour échanger entre elles les deux classes (1) et (2), et conséquemment les deux nombres n', n''. En ajoutant aux relations (12) l'équation (4), on trouve

$$(14)\quad n=\frac{p+\mathrm{L}-8}{9},\quad n'=\frac{2p-4-\mathrm{L}+9\mathrm{M}}{18},\quad n''=\frac{2p-4-\mathrm{L}-9\mathrm{M}}{18}.$$

7. Jacobi a donné une expression curieuse du nombre L, analogue à celle que Gauss avait donnée pour la racine du carré impair, dans la décomposition unique d'un nombre premier $4x+1$ en une somme de deux carrés. On arrive aisément à l'expression de Jacobi par une méthode analogue à celle que Gauss a employée dans ses *Recherches sur les résidus biquadratiques* (*Werke*, t. II, p. 88).

Si, dans les deux équations

$$(1+\alpha)^{\varpi}=1+\alpha^{\varpi}+\Sigma\mathrm{A}_i\alpha^i,\quad (i=1,2,\ldots\varpi-1),$$

$$(1+\alpha)^{2\varpi}=1+\alpha^{2\varpi}+\frac{2\varpi.2\varpi-1\ldots\varpi-1}{1.2.3\ldots\varpi}\alpha^{\varpi}+\Sigma\mathrm{A}_i\alpha^i+\Sigma\mathrm{A}_l\alpha^l,$$

$$(i=1,2,\ldots,\varpi-1),\quad (l=\varpi+1,\varpi+2,\ldots,2\varpi-1),$$

nous égalons α aux ϖ résidus cubiques du nombre p, et que nous ajoutions les résultats membre à membre, pour chacune des deux équations, en nous rappelant que $\Sigma\alpha^i(\alpha=1,g,g^2,\ldots)$ est un multiple de p pour toutes les valeurs de i non divisibles par ϖ, et qu'on a

$$\alpha^{\varpi}\equiv\alpha^{2\varpi}\equiv 1\pmod{p},$$

nous obtiendrons les deux relations

$$\Sigma(1+\alpha)^{\varpi}\equiv 2\varpi,\quad \Sigma(1+\alpha)^{2\varpi}\equiv 2\varpi+\varpi\frac{1.2.3\ldots2\varpi}{(1.2.3\ldots\varpi)^2}\pmod{p}.$$

D'un autre côté, nous avons vu que, parmi les ϖ valeurs de la somme $1+\alpha$, une seule est divisible par p; n, n', n'' sont respectivement α', $t\alpha'$, $t^2\alpha'$; on a donc

$$\Sigma(1+\alpha)^{\varpi}\equiv n+n't^{\varpi}+n''t^{2\varpi},\quad \Sigma(1+\alpha)^{2\varpi}\equiv n+n't^{2\varpi}+n''t^{\varpi}\pmod{p};$$

par conséquent les trois nombres n, n', n'' seront déterminés par les formules

$$(16)\quad \begin{cases} n + n' + n'' = \varpi - 1, \\ n + n't^{\varpi} + n''t^{2\varpi} \equiv 2\varpi, \\ n + n't^{2\varpi} + n''t^{\varpi} \equiv 2\varpi + \varpi \dfrac{1.2.3\ldots 2\varpi}{(1.2.3\ldots\varpi)^2} \pmod{p}. \end{cases}$$

Si l'on pose $t^{\varpi} \equiv r \pmod{p}$, r sera une racine primitive de la congruence $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$; on a donc

$$1 + t^{\varpi} + t^{2\varpi} \equiv 1 + r + r^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

en sorte que l'addition des formules (15) donne

$$3n \equiv 5\varpi - 1 + \varpi\Pi \pmod{p}, \quad \text{où} \quad \Pi = \frac{\varpi + 1.\varpi + 2\ldots 2\varpi}{1.2.3\ldots\varpi},$$

ou bien, en multipliant par 3 et remplaçant 3ϖ par -1,

$$9n \equiv -8 - \Pi \pmod{p = 3\varpi + 1}.$$

En comparant ce résultat avec la première des équations (14), nous trouvons

$$L \equiv -\Pi \pmod{p}.$$

Comme le nombre L est compris entre $-\frac{1}{2}p$ et $\frac{1}{2}p$, et qu'entre ces limites il n'y a qu'un seul nombre congru, suivant le module p, à $-\Pi$, ce résidu unique est la valeur de L, et l'on conclut de l'équation $9n + 8 = p + L$ que ce résidu divisé par 3 donne pour reste 1. Nous obtenons ainsi ce théorème de Jacobi :

Soit p un nombre premier $3\varpi + 1$, et posons

$$4p = L^2 + 27M^2,$$

ce qui est toujours possible d'une seule manière; L sera le résidu minimum compris entre $-\frac{1}{2}p$ et $\frac{1}{2}p$ du nombre

$$-\frac{\varpi + 1.\varpi + 2\ldots 2\varpi}{1.2\ldots\varpi}$$

divisé par p, et ce résidu, divisé par 3, laisse toujours 1 pour reste.

Les formules (15) permettent de déterminer le signe de M en fonction de la base t du système d'indices relatif au nombre p; si on les ajoute après avoir multiplié la deuxième par $t^{2\varpi}$ et la troisième par t^{ϖ} et en ayant égard à la formule $1 + t^{\varpi} + t^{2\varpi} \equiv 0 \pmod{p}$, on trouve

$$3n' \equiv (\varpi - 1) - 2\varpi + \varpi t^{\varpi}\Pi \pmod{p},$$

ou bien, en multipliant par 3,

$$9n' \equiv -4 + 2 - t^{\varpi}\Pi \equiv -(2 + t^{\varpi}\Pi) \pmod{p}.$$

La comparaison de ce résultat avec la deuxième des formules (14) donne, pour déterminer le signe de M,

$$(16) \qquad 9\mathrm{M} \equiv (1 + 2t^{\varpi})\,\mathrm{L} \pmod{p},$$

car ce signe est la seule inconnue de cette congruence.

8. Les formules (7) et (8), jointes à l'équation $s + s' + s'' = -1$, déterminent les coefficients de l'équation du troisième degré dont les racines sont les trois quantités s, s', s''; l'addition des formules de chaque groupe donne d'abord

$$\begin{aligned} s^2 + s'^2 + s''^2 &= 3\varpi - (n + n' + n'') = 2\varpi + 1,\\ ss' + s's'' + s''s &= -(n' + n'' + n + 1) = -\varpi; \end{aligned}$$

puis l'addition des équations (8), multipliées respectivement par s'', s, s', conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} 3ss's'' &= (n' + n'')(ss' + s's'' + s''s) + (n + 1)(s^2 + s'^2 + s''^2)\\ &= (2\varpi + 1)(n + 1) - \varpi(n' + n'') = (n + 1)p - \varpi^2. \end{aligned}$$

La première des formules (14), $n + 1 = \dfrac{p + \mathrm{L} + 1}{9}$ étant combinée avec cette équation, on trouve

$$ss's'' = \frac{p + \mathrm{L} + 1}{27} - \frac{(p-1)^2}{27} = \frac{p(\mathrm{L} + 3) - 1}{27}.$$

On a donc

$$(x-s)(x-s')(x-s'') = x^3 + x^2 - \frac{p-1}{3}x - \frac{p(L+3)-1}{27} = 0.$$

En posant $y = 3x + 1$, on obtient l'équation plus simple

$$(17) \qquad y^3 - 3py - pL = 0,$$

dont les racines sont les trois quantités

$$1 + 3s, \quad 1 + 3s', \quad 1 + 3s''.$$

Du reste, les équations du n° 6 fournissent aisément ces racines. Des deux équations $\Theta_1^2 = R_{1,1}\Theta_2$, $\Theta_1\Theta_2 = p$, on déduit d'abord

$$\Theta_1^3 = pR_{1,1}, \quad \Theta_1 = \sqrt[3]{p}\,\sqrt[3]{R_{1,1}} \quad \text{et} \quad \Theta_2 = \frac{1}{R_{1,1}}\Theta_1^2.$$

En ajoutant les trois équations

$$s + s' + s'' = -1, \quad s + \rho s' + \rho^2 s'' = \Theta_1, \quad s + \rho^2 s' + \rho s'' = \frac{1}{R_{1,1}}\Theta_1^2,$$

on obtient la formule

$$3s + 1 = \Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_1 + \frac{1}{R_{1,1}}\Theta_1^2,$$

qui représente les trois racines de l'équation (17), à raison des trois valeurs du radical cubique $\Theta_1 = \sqrt[3]{pR_{1,1}}$.

Pour donner une forme réelle à ces racines, qui se présentent ici sous une forme imaginaire, il suffit de calculer l'angle auxiliaire φ déterminé par les formules

$$L = 2\sqrt{p}\cos\varphi, \quad 3\sqrt{3}M = 2\sqrt{p}\sin\varphi;$$

on aura

$$R_{1,1} \text{ ou } \frac{L + 3\sqrt{-3}M}{2} = \sqrt{p}\,[\cos(2k\pi + \varphi) + i\sin(2k\pi + \varphi)],$$

$$\Theta_1 = \sqrt[3]{pR_{1,1}} = \sqrt{p}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \varphi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + \varphi}{3}\right)\right],$$

$$\Theta_2 = \sqrt{p}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \varphi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi + \varphi}{3}\right)\right],$$

$$1 + 3s = 2\sqrt{p}\cos\frac{2k\pi + \varphi}{3},$$

cette formule n'a que trois valeurs distinctes qui correspondent aux valeurs 0, 1 et 2 de k.

Le point délicat, dans cette solution, est de déterminer celle de ces trois valeurs qui convient à la somme $\theta + \theta^{t^3} + \theta^{t^6} + \ldots + \theta^{t^{p-1}}$, dans le cas où θ désigne une racine déterminée $\cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ de l'équation $x^p = 1$. M. Kummer s'est occupé de ce problème dans le tome XXXII du *Journal de Crelle* (*De residuis cubicis disquisitiones nonnullæ*, p. 341), où il ramène la question à celle de déterminer les signes et les grandeurs relatives de trois nombres m, m', m'' définis par les équations

$$\tfrac{1}{24}(p^2-1) - \Sigma\alpha = m, \quad \tfrac{1}{24}(p^2-1) - \Sigma\beta = m', \quad \tfrac{1}{24}(p^2-1) - \Sigma\gamma = m'',$$

où α, β, γ désignent ceux des termes de la suite $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ qui appartiennent respectivement aux classes (0), (1) et (2), définies plus haut (n° 2). Il reste encore à trouver un moyen pratique de calculer les sommes $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$ et $\Sigma\gamma$.

9. Gauss a obtenu, avant Jacobi, l'équation (11). Il l'a déduite de la relation

$$(18) \qquad n^2 + n'^2 + n''^2 + n - (n+1)(n'+n'') - n'n'' = 0,$$

obtenue en exprimant de deux manières différentes, au moyen des nombres n, n', n'', le nombre de solutions de la congruence $1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{p}$. Cette relation se déduit aisément des formules (7) et (8), en réduisant le produit $ss's''$ à une fonction linéaire des sommes s, s' et s''; on trouve successivement

$$\begin{aligned}
ss' &= -(n+1) + (n'-n-1)s + (n''-n-1)s' \\
ss's'' &= -(n+1)s'' + (n'-n-1)[n's'' + n''s + (n+1)s'] \\
&\qquad + (n''-n-1)[n's' + n''s'' + (n+1)s] \\
&= [n'n'' - (n+1)^2](s+s') \\
&\qquad + [n'(n'-n-1) + n''(n''-n-1) - (n+1)]s''.
\end{aligned}$$

Comme dans cette équation θ désigne une racine primitive quelconque de l'équation $x^p = 1$, on peut, sans qu'elle cesse d'être vraie, remplacer ς par θ^t, ce qui revient à faire la substitution circulaire (s, s', s''); on a donc

$$ss's'' = [n'n'' - (n+1)^2](s'+s'') + [n''(n'-n-1) + n''(n''-n-1) - (n+1)]s.$$

La comparaison des deux expressions du produit $ss's''$ donne

$$(s-s'')[(n+1)^2 + n'^2 + n''^2 - (n+1)(n'+n''+1) - n'n''] = 0.$$

Comme on n'a pas $s - s'' = 0$, puisque l'équation (17) n'a pas de racines égales, il faut que le second facteur soit nul; on obtient ainsi la formule (18). Pour en déduire l'équation (11), il faut, après l'avoir multipliée par 36, l'ajouter membre à membre à l'équation

$$12(n+n'+n'') + 16 = 4p,$$

et appliquer au résultat la méthode de décomposition en carré

10. Dans une Note publiée en décembre 1874, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, les valeurs des nombres n, n', n'', données ici par les formules (14), ont été obtenues au moyen des relations qui y sont établies entre ces nombres et les coefficients a_0, a_1, a_2 de la fonction $R_{1,1}$ de Cauchy mise sous la forme $R_{1,1} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2$. Nous les avons obtenus ici directement en appliquant pour la détermination des sommes s, s', s'' une méthode analogue à celle que Vandermonde a suivie pour la résolution de l'équation $x^{11} = 1$. Cette méthode nous a donné les deux formules

$$\Theta_1\Theta_{-1} = p, \quad \Theta_h\Theta_h = R_{h,h}\Theta_{2h},$$

qui, généralisées, deviennent les formules fondamentales des recherches de Cauchy et de Jacobi sur les applications de la théorie des fonctions circulaires à la théorie des nombres, à savoir

$$\Theta_h\Theta_{-h} = (-1)^{h\varpi}p, \quad \Theta_h\Theta_k = R_{h,k}\Theta_{h+k}.$$

Ainsi Cauchy a pu trouver ces formules en cherchant à simplifier, ainsi que nous venons de le faire, la manière dont Gauss obtient les sommes s, s', s'' à la fin de la septième Section des *Disquisitiones*. Cela explique aussi comment il s'est rencontré avec Jacobi.

Des surfaces sur lesquelles un point peut se mouvoir suivant une certaine loi;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN,

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Considérons un point matériel M, de masse égale à l'unité, sollicité par une force F dont les projections sur trois axes rectangulaires sont, u étant une fonction donnée de x, y, z,

$$X = \frac{du}{dx}, \quad Y = \frac{du}{dy}, \quad Z = \frac{du}{dz};$$

l'équation $u =$ const. représente une surface de niveau dont l'intersection avec une surface quelconque S peut être appelée *ligne de niveau* sur S. Je me propose de déterminer cette dernière surface, de manière que le point M, obligé de rester sur elle, et abandonné sans vitesse initiale à l'action de F, décrive toujours une trajectoire C orthogonale à toutes les lignes de niveau; si, par exemple, M n'était sollicité que par la pesanteur, il devrait tomber sur la surface cherchée suivant une ligne de plus grande pente.

Désignons, selon l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, que fournirait l'équation de la surface S; le temps n'entre pas explicitement dans nos calculs, mais les dérivées des diverses variables par rapport à lui seront représentées par des lettres accentuées. Les équations du mouvement de M ont une forme bien connue :

$$x'' = X + \lambda p, \quad y'' = Y + \lambda q, \quad z'' = Z - \lambda.$$

En un point quelconque A de la trajectoire C passe une ligne de niveau H dont la tangente AB est perpendiculaire sur la normale à S AN, et sur la direction AP de F; si donc α, β, γ sont les cosinus directeurs de AB, nous aurons

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0, \quad \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0;$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{qZ + Y} = \frac{\beta}{-X - pZ} = \frac{\gamma}{pY - qX}.$$

La tangente AT à la trajectoire C doit être perpendiculaire sur AN et sur AB; donc

$$(2) \quad px' + qy' - z' = 0, \quad (qZ + Y)x' - (X + pZ)y' + (pY - qX)z' = 0.$$

La dernière de ces équations, différentiée par rapport au temps, donne

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &(qZ + Y)x'' - (X + pZ)y'' + (pY - qX)z'' - Xz'(sx' + ty') \\ &\quad + Yz'(rx' + sy') + Z[s(x'^2 - y'^2) + (t - r)x'y'] \\ &\quad - (y' + qz')\left(x'\frac{dX}{dx} + y'\frac{dX}{dy} + z'\frac{dX}{dz}\right) \\ &\quad + (x' + pz')\left(y'\frac{dY}{dx} + y'\frac{dY}{dy} + z'\frac{dY}{dz}\right) \\ &\qquad\qquad + (qx' - py')\left(x'\frac{dZ}{dz} + y'\frac{dZ}{dy} + z'\frac{dZ}{dz}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on ajoute membre à membre les trois équations du mouvement, multipliées respectivement par $qZ + Y$, $-X - pZ$, $pY - qX$, on reconnaît que la somme des termes en x'', y'' et z'' dans l'équation (3) est nulle; les autres termes forment une fonction homogène du second degré en x', y', z'; on peut y remplacer ces dérivées par des quantités proportionnelles tirées du système (2),

$$\begin{aligned} \frac{x'}{(1 + p^2 + q^2)X - p(pX + qY - Z)} &= \frac{y'}{(1 + p^2 + q^2)Y - q(pX + qY + Z)} \\ &= \frac{z'}{(1 + p^2 + q^2)Z + pX + qY - Z}. \end{aligned}$$

En faisant après la substitution quelques transpositions de termes, remplaçant $pY - qX$ par $p(Y + qZ) - q(X + pZ)$, enfin, en divisant par $(1+p^2+q^2)^2$, nous pourrons écrire l'équation (3) de la manière suivante :

$$(4)\left\{\begin{aligned}&(Y+qZ)\Big\{\left(\frac{dX}{dx}+p\frac{dZ}{dx}\right)X+\left(\frac{dX}{dy}+p\frac{dZ}{dy}\right)Y+\left(\frac{dX}{dz}+p\frac{dZ}{dz}\right)Z\\&\qquad+\frac{pr+qs}{(1+p^2+q^2)^2}(pX+qY-Z)^2-\frac{pX+qY-Z}{1+p^2+q^2}\\&\qquad\times\left[rX+sY+p\left(\frac{dX}{dx}+p\frac{dZ}{dx}\right)+q\left(\frac{dX}{dy}+p\frac{dZ}{dy}\right)-\frac{dX}{dz}-p\frac{dZ}{dz}\right]\Big\}\\&=(X+pZ)\Big\{\left(\frac{dY}{dx}+q\frac{dZ}{dx}\right)X+\ldots+\frac{ps+qt}{(1+p^2+q^2)^2}(pX+qY-Z)^2\ldots\Big\}.\end{aligned}\right.$$

C'est l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui représente la surface cherchée; sa forme met en évidence l'intégrale première. Je fais, pour abréger,

$$X^2+Y^2+Z^2-\frac{(pX+qY-Z)^2}{1+p^2+q^2}=V;$$

V est exprimé comme u en fonction de x, y, z; mais, pour les points de la surface S, z dépend de x et de y, u et V deviennent fonctions de ces deux seules variables, et c'est à ce point de vue qu'on peut les considérer dans l'équation (4); je prends la caractéristique ∂ pour désigner dans ce cas les dérivées partielles, qui sont liées aux dérivées partielles prises en regardant x, y, z comme indépendantes, par les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz},\quad \ldots,$$

et de même pour les autres variables; on se rappellera que X, Y, Z sont les dérivées partielles de u par rapport à x, y, z et qu'on a, par conséquent,

$$\frac{dY}{dz}=\frac{dZ}{dy},\quad \frac{dZ}{dx}=\frac{dX}{dz},\quad \frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dx};$$

on voit alors que l'équation (4) revient à la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}.$$

V et u dépendant tous deux de x et y ont leurs dérivées proportionnelles; l'une est une fonction arbitraire, φ, de l'autre, et en mettant dans V, $X^2+Y^2+Z^2$ en facteur, on pourra écrire l'intégrale première de l'équation (4)

$$(5)\qquad (X^2+Y^2+Z^2)\left[1-\frac{(pX+qY-Z)^2}{(1+p^2+q^2)(X^2+Y^2+Z^2)}\right]=\varphi(u).$$

Cette équation ne peut être elle-même intégrée généralement, mais elle donne une propriété géométrique des surfaces S. Soit i l'angle de la normale AN au point quelconque A avec la normale AP à la surface de niveau qui y passe; l'équation (5) revient à

$$(6)\qquad \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sin i = F\sin i = \sqrt{\varphi(u)};$$

le sinus de l'angle sous lequel une surface de niveau coupe S varie aux divers points de la ligne H d'intersection en raison inverse de F ou du paramètre différentiel du premier ordre de la surface de niveau. Appelons A′ et A″ les points où la surface de niveau infiniment voisine rencontre la normale AN et la trajectoire C; on a

$$AA'=\frac{du}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad AA''=\frac{AA'}{\sin i};$$

l'équation (6) exprime que la longueur analogue à AA″ est constante tout le long de H; deux lignes de niveau infiniment voisines interceptent des arcs égaux sur toutes leurs trajectoires orthogonales C, et celles-ci sont, d'après un théorème connu, des lignes géodésiques sur S. On aurait pu établir directement cette propriété et en tirer les équations (6), (5) et (4) par la marche inverse de celle que j'ai suivie. Pour démontrer que C est une ligne géodésique, je remarque que la tangente AT à cette courbe, la normale AN et la direction AP de F, toutes trois perpendiculaires à AB, sont dans un même plan; F peut se décomposer en deux forces, l'une suivant AT, qui produit l'accélération tangentielle, l'autre suivant AN; cette dernière et la réaction de la surface S sur le point M ont même direction, et, comme leur résultante donne l'accélération centripète de M, la normale principale de C et la normale à S sont confondues.

Quand on connaîtra S dans un cas particulier, on aura ses lignes de niveau et leurs trajectoires orthogonales; le mouvement sur l'une de ces dernières se déduira de l'équation des forces vives

$$v^2 = 2(u - u_0).$$

Je donnerai quelques exemples très-simples des surfaces que je viens de définir.

Supposons le point M attiré vers l'origine O des coordonnées par une force F qui dépende de la distance. Une surface de niveau quelconque est une sphère dont le centre est en O et sur laquelle F a une grandeur constante; cette sphère coupe S sous un angle constant (6), et le théorème de Joachimstahl permet d'en conclure que l'intersection est une ligne de courbure de S. La surface cherchée admet un système de lignes de courbure situées sur des sphères concentriques; voici un calcul simple qui permet d'en déduire le second système de lignes de courbure, situées, on le sait, dans des plans qui passent en O. Je désigne par d et δ les variations que subit un élément quand on se déplace, soit sur une ligne du premier système H, soit sur une du second C; l'équation des lignes de courbure et une combinaison de fractions donnent

$$\frac{\delta p}{\delta q} = \frac{\delta x + p\,\delta z}{\delta y + q\,\delta z} = \frac{\delta x + p\,\delta z + z\,\delta p}{\delta y + q\,\delta z + z\,\delta q} = \frac{\delta(x + pz)}{\delta(y + qz)}.$$

Ollinde Rodrigues a remarqué que $\frac{\delta p}{\delta q} = -\frac{dy}{dx}$; d'ailleurs $\frac{dy}{dx}$ est égal au rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ défini par les équations (1), où X, Y, Z sont proportionnels à x, y, z; donc

$$\frac{\delta(x + pz)}{\delta(y + qz)} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{x + pz}{y + qz}, \quad \frac{x + pz}{y + qz} = k,$$

k étant constant tout le long de C; or $x + pz$ et $y + qz$ sont les coordonnées du point où la normale à S en x, y, z perce le plan des xy; les pieds des normales aux divers points de C sont sur une droite qui passe en O, et, comme la direction de XOY est quelconque, ces normales sont dans un plan passant par l'origine et contenant la ligne de courbure C cherchée. De la nature de ces deux systèmes, on conclut que S peut être engendré par une ligne plane quelconque dont le plan s'enroulerait sur un cône qui a son sommet en S. Un cas particulier est celui des surfaces sur lesquelles un point pesant tomberait toujours suivant une ligne de plus grande pente; elles peuvent être engendrées par une courbe plane dont le plan s'enroule sur un cylindre vertical.

Soient, en second lieu, $X = Rx$, $Y = Ry$, $Z = 0$, R étant une fonction donnée de la distance ρ à l'axe des z. Les surfaces de niveau sont des cylindres de révolution autour de OZ, et l'équation (5) peut, en désignant par f une fonction arbitraire, être mise sous la forme

$$1 + p^2 + q^2 = (px + qy)^2 f(\rho);$$

en remplaçant x et y par $\rho\cos\theta$ et $\rho\sin\theta$, cette équation se transforme dans la suivante :

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + [\rho^2 - \rho^4 f(\rho)]\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 + \rho^2 = 0.$$

J'obtiens une intégrale complète de la forme $z = \psi(\theta) + \varpi(\rho)$, en posant

$$\psi'(\theta) = a, \quad [\rho^4 f(\rho) - \rho^2]\varpi'(\rho) = a^2 + \rho^2,$$

d'où

$$z = b + a\theta + \int \frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\frac{a^2 + \rho^2}{\rho^2 f(\rho) - 1}};$$

a et b sont des constantes; nous avons un héliçoïde dont l'axe est OZ. Si l'on cherche son enveloppe en liant a et b par une relation arbitraire, on aura la forme générale de S; pour $a = 0$, on a des surfaces de révolution autour de OZ.

Supposons enfin que les surfaces de niveau soient des plans passant par OZ, et que les arcs de trajectoires compris entre deux de ces plans dont l'angle est donné aient une longueur constante, on trouve, avec les notations du paragraphe précédent, l'intégrale complète

$$z = b + a\theta + \int d\rho\sqrt{\frac{a^2 + \rho^2 - k^2}{k^2 - \rho^2}};$$

c'est encore un héliçoïde dont l'enveloppe représentera l'intégrale de l'équation (5).

Résolution de l'équation indéterminée $y^2 - ax^2 = bz$ en nombres entiers;

PAR M. SIGISMOND GUNTHER,

Privat-docent à l'École Polytechnique de Munich.

La méthode ordinaire pour la résolution des équations indéterminées du second degré prend pour base le développement connu d'une expression irrationnelle x en fraction continue

$$x = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 + x}}}}.$$

Mais on sait qu'il y a aussi un autre procédé qui conduit au même but, si l'on pose avec Cataldi

$$\sqrt{a^2 + n} = a + \cfrac{n}{2a + \cfrac{n}{2a + \ddots}}$$

Nous proposons d'étudier les propriétés de cette forme plus simple qui s'appliquent à la solution de la congruence

$$(1) \qquad y^2 \equiv ax^2 \pmod{b}.$$

1. Considérons la fraction continue

$$K = \cfrac{a}{2u - \cfrac{a}{2u - \cfrac{a}{2u \ddots}}}$$

et désignons par Q_i le dénominateur de la $i^{ième}$ fraction réduite de K. On a la relation assez connue [*]

$$Q_{2n} = \begin{vmatrix} 2u & \sqrt{a} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{a} & 2u & \sqrt{a} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 2u & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2u & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{a} & 2u & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sqrt{a} & 2u_{(2n)} \end{vmatrix}$$

où l'indice du terme $2u$ indique seulement l'ordre du déterminant. Additionnant à la $q^{ième}$ série horizontale $(q \leqq n)$ la $(2n-q+1)^{ième}$, on obtient

$$Q_{2n} = \left|\begin{array}{cccccc:cccccc} 2u & \sqrt{a} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sqrt{a} & 2u \\ \sqrt{a} & 2u & \sqrt{a} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{a} & 2u & \sqrt{a} \\ 0 & \sqrt{a} & 2u & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2u & \sqrt{a} & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2u & \sqrt{a} & \sqrt{a} & 2u & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{a} & 2u_{(n)}+\sqrt{a} & 2u+\sqrt{a} & \sqrt{a} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sqrt{a} & 2u & \sqrt{a} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \sqrt{a} & 2u & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2u & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{a} & 2u & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sqrt{a} & 2u_{(2n)} \end{array}\right|$$

Si maintenant on soustrait de chaque $q^{ième}$ colonne $(q \leqq n)$ la

[*] *Voir*, par exemple, GUNTHER, *Lehrbuch der Determinantentheorie*; Erlangen, 1875, p. 157.

$(2n-q+1)^{ième}$, on trouvera, d'après le théorème de Laplace,

$$Q_{2n} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{a} & \sqrt{a}-2u \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sqrt{a} & -2u & -\sqrt{a} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2u & -\sqrt{a} & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & -\sqrt{a} & -2u & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{a} & -2u & -\sqrt{a} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2u & -\sqrt{a} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{a} & 2u \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{a} & 2u & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2u & \sqrt{a} & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \sqrt{a} & 2u & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{a} & 2u & \sqrt{a} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2u+\sqrt{a} & \sqrt{a} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et, par décomposition,

$$\begin{aligned} Q_{2n} &= \left[(2u-\sqrt{a})\,Q_{n-1} - aQ_{n-2}\right]\left[(2u+\sqrt{a})\,Q_{n-1} - aQ_{n-2}\right] \\ &= (2uQ_{n-1} - aQ_{n-2})^2 - aQ_{n-1}^2. \end{aligned}$$

D'autre part, la loi de formation des réduites nous donne la formule

$$2uQ_{n-1} - aQ_{n-2} = Q_n,$$

et, par suite, nous obtiendrons comme résultat final

$$Q_n^2 - aQ_{n-1}^2 = Q_{2n}. \tag{2}$$

Nous avons trouvé ce théorème par la transformation des déterminants exposée ci-dessus; mais on peut aussi parvenir à cette relation au moyen du calcul algébrique; car l'identité

$$\begin{aligned} &\sqrt{u^2-a}\left[(u+\sqrt{u^2-a})^{2n+1} - (u-\sqrt{u^2-a})^{2n+1}\right] \\ &\quad = \sqrt{u^2-a}\left[(u+\sqrt{u^2-a})\,(u+\sqrt{u^2-a})^{2n}\right. \\ &\qquad\qquad \left. - (u-\sqrt{u^2-a})\,(u-\sqrt{u^2-a})^{2n}\right] \end{aligned}$$

donne immédiatement la suivante :

$$\begin{aligned} &2\sqrt{u^2-a}\left[(u+\sqrt{u^2-a})^{2n+1} - (u-\sqrt{u^2-a})^{2n+1}\right] \\ &\quad = (u+\sqrt{u^2-a})^{2n+2} - 2a^{n+1} + (u-\sqrt{u^2-a})^{2n+2} \\ &\qquad - a\left[(u+\sqrt{u^2-a})^{2n} - 2a^n + (u-\sqrt{u^2-a})^{2n}\right]. \end{aligned}$$

La division par l'expression $4(u^2 - a)$ nous conduit à l'identité

$$\frac{(u+\sqrt{u^2-a})^{2n+1}-(u-\sqrt{u^2-a})^{2n+1}}{2\sqrt{u^2-a}} = \left[\frac{(u+\sqrt{u^2-a})^{n+1}-(u-\sqrt{u^2-a})^{n+1}}{2\sqrt{u^2-a}}\right]^2 - a\left[\frac{(u+\sqrt{u^2-a})^{n}-(u-\sqrt{u^2-a})^{n}}{2\sqrt{u^2-a}}\right]^2,$$

ou encore, comme on le voit aisément [*],

$$Q_{2n} = Q_n^2 - aQ_{n-1}^2.$$

2. La comparaison de cette équation avec (1) nous montre qu'il faut poser

$$y = Q_n, \quad x = Q_{n-1}, \quad bz = Q_{2n}.$$

La valeur u jusqu'ici est inconnue, et il faudra maintenant résoudre en nombres entiers l'équation

$$Q_{2n} = bz. \tag{3}$$

Or on a, comme on a vu plus haut,

$$Q_{2n} = \frac{(u+\sqrt{u^2-a})^{2n+1}-(u-\sqrt{u^2-a})^{2n+1}}{2\sqrt{u^2-a}},$$

et, par conséquent, l'équation (3) se transforme comme il suit :

$$\frac{(u+\sqrt{u^2-a})^{2n+1}-(u-\sqrt{u^2-a})^{2n+1}}{2\sqrt{u^2-a}} = \dot{b}, \tag{4}$$

où $\dot{b}$ est le symbole connu introduit par Crelle pour désigner un nombre entier quelconque divisible par b. Le binôme nous conduit

[*] Comparez, au besoin, la Note élémentaire qui suit l'article de M. Günther.

enfin de l'équation (4) à la forme développée

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\binom{2n+1}{1}u^{2n}+\binom{2n+1}{3}u^{2n-2}(u^2-a)\\ &\quad+\binom{2n+1}{5}u^{2n-4}(u^2-a)^2+\ldots+\binom{2n+1}{2n+1}(u^2-a)^n=b,\end{aligned}\right.$$

$$\left[\binom{\nu}{\omega}=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\omega+1)}{1.2.3\ldots\omega}\right].$$

On regardera comme inconnues, dans cette équation, les deux nombres u et n, et la discussion complète exigera la distinction de plusieurs cas séparés.

3. Soit d'abord a multiple de b, par exemple, $a = \mathrm{M}b$. Alors il suffira évidemment de faire $u = \mathrm{M}bu'$ (u' arbitraire) pour satisfaire à notre condition; d'où ce théorème :

I. *Pourvu que le coefficient de y^2 soit $= \mathrm{M} \times$ le coefficient de z (le module) et u' un nombre quelconque entier et positif, la congruence*

$$y^2 \equiv ax^2 \pmod{b}$$

a pour solution certains dénominateurs des réduites de la fraction continue

$$\cfrac{a}{2\mathrm{M}u' - \cfrac{a}{2\mathrm{M}u' \ldots}}$$

car on trouvera, pour l'équation

$$y^2 - ax^2 = bz,$$

les valeurs

$$z = \frac{1}{b}\mathrm{Q}_{2n}, \quad y = \mathrm{Q}_n, \quad x = \mathrm{Q}_{n-1}.$$

u' et n représentent des nombres entiers et positifs quelconques; on a deux séries de ∞ valeurs satisfaisant à notre congruence.

Exemple. — Soit proposée l'équation

$$y^2 - 4x^2 = 2z, \quad a = 2.2, \quad b = 1.2, \quad \mathrm{M} = 2.$$

Si l'on pose $u' = 3$, il faut considérer la fraction continue

$$\cfrac{4}{12 - \cfrac{4}{12 - \ddots}},$$

d'où l'on déduit les valeurs ($u = 2$),

$$z = \frac{1}{2} Q_{2.2} = 9512, \quad y = Q_2 = 140, \quad x = Q_1 = 12$$

On peut vérifier, en effet, l'identité

$$140^2 - 4.12^2 = 2.9512.$$

4. Tous les autres cas se ramènent à la résolution de la congruence quadratique

$$u^2 \equiv a \,(\text{mod. } b).$$

On sait que ce problème se trouve résolu dans les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, et nous pouvons donc le supposer connu; nous nous contentons de résumer cette solution comme il suit.

La congruence proposée possède des racines, si l'on peut regarder a comme résidu quadratique de b. Or soit

$$b = r^m s^n t^p, \quad \ldots,$$

où l'on entend par $r, s, t, \ldots$ des nombres premiers quelconques (1 et 2 inclus); alors le nombre a est toujours résidu quadratique de b, si l'on a [*]

$$a\mathrm{R}r, \quad a\mathrm{R}s, \quad a\mathrm{R}t \ldots$$

Naturellement, il y a aussi des cas où la congruence ne possède pas une seule racine; si b, par exemple, est un nombre premier satisfaisant à la congruence

$$a^{\frac{b-1}{2}} \equiv -1 \,(\text{mod. } b),$$

[*] La notation $a\mathrm{R}r$ signifie, dans Gauss, a résidu quadratique de r.

il est impossible de trouver un nombre tel que

$$u^2 - a = b.$$

Mais, en général, nous supposerons qu'il existe k racines

$$u_1, u_3, u_3, \ldots, u_i, \ldots, u_k.$$

Nous prenons ici le mot *racine* dans le sens déterminé de Gauss; mais il est clair que chaque valeur

$$u_i \pm mb$$

satisfait également à la congruence $u^2 \equiv a \pmod{b}$.

5. Soit d'abord b impair $= 2c + 1$; alors on voit que toute expression de la forme (p arbitraire)

$$\left[\frac{(2p-1)(2c+1)}{\rho}\right] [\rho < (2p-1)(2c+1)]$$

est divisible par b, et l'on arrive au théorème suivant :

II. *La congruence*

$$y^2 \equiv ax^2 \pmod{2c+1}$$

peut être résolue dès qu'on connaît le dénominateur d'une réduite d'indice

$$(2p-1)(2c+1) - 1 = \dot{2}$$

de la fraction continue

$$\cfrac{a}{2u_i - \cfrac{a}{2u_i - \ddots}} \quad [u_i^2 \equiv a \pmod{2c+1}].$$

On obtiendra, en effet,

$$z = \frac{1}{b} Q_{(2p-1)(2c+1)-1}, \quad y = Q_{\frac{1}{2}[(2p-1)(2c+1)-1]}, \quad x = Q_{\frac{1}{2}[(2p-1)(2c+1)-1]-1}.$$

Exemple. — Soit proposée l'équation

$$y^2 - 4x^2 = 5z = (2.2 + 1)z.$$

Comme $3^2 - 4 = 5$, on peut poser $u_i = 3$, d'où l'on déduit la fraction continue

$$\cfrac{4}{6 - \cfrac{4}{6 - \ldots}}$$

En posant $p = 1$, nous trouvons

$$z = \frac{1}{5} Q_{5-1} = \frac{1}{5} Q_4 = 176, \quad y = Q_2 = 32, \quad x = Q_1 = 6.$$

On peut vérifier, en effet, que

$$32^2 - 4.6^2 = 5.176.$$

6. Supposons à présent b pair. Alors il faut distinguer deux cas spéciaux, selon que l'on aura b d'une des deux formes

$$2^{2m}(2c + 1) \quad \text{ou} \quad 2^{2m+1}(2c + 1),$$

où m et c sont des nombres entiers et positifs quelconques. Le cas

$$b = 2^{2m}(2c + 1)$$

est immédiatement réductible, puisque l'équation

$$y^2 - ax^2 = bz = 2^{2m}(2c + 1)z$$

se transforme de cette manière :

$$\left(\frac{y}{2^m}\right)^2 - a\left(\frac{x}{2^m}\right)^2 = (2c + 1)z,$$

ou, si l'on introduit les inconnues nouvelles y' et x',

$$y'^2 - ax'^2 = (2c + 1)z.$$

Exemple. — Si nous avons l'équation

$$y^2 - 7x^2 = 48z = 2^4(2.1 + 1)z,$$

nous la réduisons à la suivante :

$$y'^2 - 7x'^2 = 3z,$$

et, puisqu'on sait que 7 est une racine de la congruence

$$u^2 \equiv 7 \pmod{3},$$

on peut prendre la fraction continue

$$\cfrac{7}{14 - \cfrac{7}{14 - \ldots}}$$

La substitution $p = 2$ nous donne les solutions

$$z = \frac{1}{3} Q_8 = 378135891, \quad y' = Q_4 = 34349, \quad x' = Q_3 = 2548,$$

et nous pouvons vérifier l'identité

$$137396^2 - 7.10192^2 = 48.378135891.$$

L'étude du cas contraire, où

$$b = 2^{2m+1}(2c+1),$$

conduit à un résultat partiellement négatif; car, en appliquant la même méthode de transformation, nous réduisons l'équation

$$y^2 - ax^2 = bz = 2^{2m+1}(2c+1)z$$

à la forme plus simple

$$y'^2 - ax'^2 = 2(2c+1)z,$$

et l'on voit sans aucune difficulté qu'il n'est pas toujours possible de résoudre cette équation par notre méthode; car, si nous considérons la formule (5), nous trouvons que le dernier terme $(u^2 - a)$ n'est divisible par b que dans ces deux cas :

$$\left.\begin{array}{ll} a \text{ impair}, & u \text{ impair} \\ a \text{ pair}, & u \text{ pair} \end{array}\right\} u^2 - a = \dot{2}.$$

Dans le premier cas, il n'y a pas de solution, parce que la somme

$$\binom{2n+1}{3} u^{2n-2}(u^2-a)^2+\ldots+\binom{2n+1}{2n+1}(u^2-a)^n$$

est divisible par 2, mais non le premier terme $(2n+1)u^{2n}$, qui est toujours un nombre impair. Pour le deuxième cas, on peut se servir de la remarque suivante. Le nombre $u_i = 2u'_i$, comme on le suppose, est toujours pair. On fera donc

$$2n+1=(2p-1)(2c+1), \quad [p \geqq 1],$$

et l'on obtiendra

$$(2n+1)u^{2n}=(2p-1)(2c+1)2^{2n}u_i'^{2n}=\left[\dot{\overline{2(2c+1)}}\right].$$

Exemple. — Si nous avons l'équation

$$y^2-6x^2=10z=2(2.2+1)z,$$

nous trouvons d'abord la racine $u_i = 2u'_i = 2.3$; prenons alors la fraction continue

$$\cfrac{6}{12-\cfrac{6}{12-\ldots}};$$

les dénominateurs des réduites nous donnent, pour $p=1$, les valeurs

$$z=\frac{1}{10}Q_4=1818, \quad y=Q_2=138, \quad x=Q_1=12.$$

Voici la solution complète que l'on obtient ainsi :

$$138^2-6.12^2=18180;$$

et de plus deux autres relations équivalentes :

$$69^2-6.6^2=4545;$$
$$23^2-6.2^2=505.$$

Maintenant nous pouvons regarder comme finie la discussion de tous les cas possibles de la congruence proposée.

NOTE.

La valeur de Q_n et la formule fondamentale

$$Q_{2n} = Q_n^2 - a\,Q_{n-1}^2$$

peuvent s'établir d'une manière élémentaire, comme il suit. Posons

$$\sqrt{u^2 - a} = v, \quad u + v = s, \quad u - v = d,$$

ce qui donne

$$2u = s + d, \quad 2v = s - d, \quad a = u^2 - v^2 = ds.$$

On trouve immédiatement

$$Q_1 = 2u = s + d = \frac{s^2 - d^2}{s - d},$$

$$Q_2 = 4u^2 - a = s^2 + 2ds + d^2 - ds = \frac{s^3 - d^3}{s - d},$$

$$Q_3 = (4u^2 - a)\,2u - a.2u = \frac{s^4 - d^4}{s - d}.$$

Ces valeurs font pressentir que la loi est générale, ou que l'on a

$$Q_{n-2} = \frac{s^{n-1} - d^{n-1}}{s - d}, \quad Q_{n-1} = \frac{s^n - d^n}{s - d}, \quad \ldots.$$

En effet, on déduit de ces relations et de la formule

$$Q_n = 2u\,Q_{n-1} - a\,Q_{n-2}$$

la valeur

$$Q_n = \frac{(s + d)(s^n - d^n) - sd(s^{n-1} - d^{n-1})}{s - d} = \frac{s^{n+1} - d^{n+1}}{s - d}.$$

Une fois ce résultat obtenu, la vérification de la formule fondamentale se fait par un calcul très-simple, identique au fond à celui qui termine le n° **1** de l'article de M. Günther.

P. Mansion.

Note sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique;

Par M. H. RESAL.

M. Marey a publié, en 1875, un Mémoire des plus intéressants intitulé : *Mouvement des ondes liquides*, pour servir à la théorie du pouls. Dans son Mémoire, le savant professeur donne une relation des expériences qu'il a faites sur le mouvement d'un liquide dans un tuyau élastique, et il arrive à poser plusieurs règles relatives à la manière dont les ondes se propagent. Dans cette Note, je n'ai pas d'autre objet que de justifier par l'analyse une partie des résultats auxquels M. Marey est arrivé.

Soient

p_0 la pression extérieure censée constante qui s'exerce sur le tuyau;

ω_0 la section intérieure du tuyau à l'état naturel;

R_0 le rayon de cette section;

p, ω, v la pression, la section et la vitesse, au bout du temps t, correspondant à la longueur s de l'axe du tuyau, mesurée à partir d'une origine déterminée et au rayon intérieur R;

π le poids spécifique du liquide;

e l'épaisseur du tuyau;

E le coefficient d'élasticité de la matière dont il est formé;

$Ne\,ds$ la tension normale développée dans la section faite dans le tuyau par un plan mené par son axe et limitée par les deux plans normaux au même axe correspondant aux arcs s et $s + ds$.

Je supposerai que les rapports $\frac{e}{R_0}$, $\frac{R - R_0}{R_0}$ sont assez petits pour qu'on puisse en négliger la valeur devant l'unité. En exprimant que la portion du tuyau déterminée par un plan méridien et les deux plans normaux ci-dessus, distants de ds, se trouve en équilibre sous l'action des pressions et des actions élastiques développées dans les sections méridiennes, on reconnaît facilement que l'on a

$$2Ne\,ds = 2R(p - p_0),$$

d'où

$$N = \frac{R(p - p_0)}{e};$$

mais, si λ désigne la dilatation qu'éprouve la matière du tuyau tangentiellement à sa ligne méridienne moyenne, on a

$$N = E\lambda,$$

d'où

$$\lambda = \frac{R(p - p_0)}{Ee};$$

mais il est visible que λ n'est autre chose que $\frac{R - R_0}{R_0}$, de sorte que l'on peut écrire

$$(1) \qquad \omega = \omega_0 + 2\pi R_0 . R_0 \lambda = \omega_0 \left[1 + \frac{2R_0}{Ee}(p - p_0)\right].$$

Dans ce qui suit nous négligerons la pesanteur, ce qui revient à supposer le tuyau horizontal ou sensiblement horizontal; nous supposerons de plus que la vitesse du liquide est assez petite pour qu'on puisse négliger sa seconde puissance et son produit par la dilatation λ.

L'hypothèse des tranches donne la même équation aux différentielles partielles

$$(2) \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\pi}\frac{dp}{ds},$$

que si le tuyau était indéformable.

Dans le temps dt, il passe par la section ω le volume liquide $\omega v\,dt$, et par la section qui est distante de ds le volume $\omega v\,dt + \frac{d\omega v}{ds}dt\,ds$; il est donc resté entre les plans de ces deux sections le volume $-\frac{d\omega v}{ds}dt\,ds$.

qui a produit l'augmentation de volume $\frac{d\omega}{dt}\,dt\,ds$. Nous avons donc

$$\frac{d\omega v}{ds} = -\frac{d\omega}{dt};$$

d'où, en développant et ayant égard à la relation (1) ainsi qu'au degré d'approximation convenu,

$$(3)\qquad \frac{dv}{ds} = -\frac{2\,R_0}{Ee}\frac{dp}{dt};$$

si l'on élimine p entre les équations (2) et (3), on trouve

$$(4)\qquad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{Eeg}{2\,R_0\pi}\frac{d^2v}{ds^2},$$

équation dont la forme est bien connue et d'où l'on déduit, pour la vitesse de propagation des ondes,

$$V = \sqrt{\frac{Eeg}{2\,R_0\pi}}.$$

Ainsi cette vitesse est égale à la racine carrée du produit des rapports de l'épaisseur au diamètre du tuyau et du coefficient d'élasticité de la matière dont le tuyau est formé à la densité de masse du liquide, ce qui paraît conforme aux résultats de l'expérience.

Mémoire sur le problème des trois corps;

PAR M. EMILE MATHIEU.

On imagine un système de trois corps réduits à des points qui s'attirent suivant une fonction donnée de la distance, et il s'agit d'en étudier le mouvement. On peut cependant supposer que l'un des trois corps soit un point rendu fixe, tandis que les deux autres corps seulement sont mobiles. En effet, ainsi que l'a fait remarquer Jacobi (*Journal de Crelle,* t. XXVI, p. 115), en s'appuyant sur le théorème de la conservation du mouvement du centre de gravité, on peut ramener le problème général à ce cas particulier, ou plutôt à une question semblable qui n'en diffère que par la fonction de forces, mais qui se prête aux mêmes réductions. C'est en faisant cette simplification que nous avons traité cette question.

Citons quelques Mémoires où le problème des trois corps a été traité. Nous remarquerons d'abord le Mémoire de Lagrange, dans lequel le problème est ramené à la résolution d'un système d'équations différentielles du septième ordre et dont M. Serret a simplifié l'analyse en introduisant plus de symétrie dans les formules (*OEuvres de Lagrange,* t. VI, p. 324). Nous citerons ensuite le Mémoire de Jacobi (*Journal de Crelle,* t. XXVI, p. 115), le Mémoire de M. Bertrand (*Journal de Liouville,* t. XVII, p. 429, 1852), enfin le Mémoire de Bour (*Journal de l'École Polytechnique,* t. XXI, p. 37), qui a pour point de départ le travail de M. Bertrand.

Bour a obtenu une expression fort remarquable de la force vive du système des corps, qui l'a conduit à un système de huit équations différentielles canoniques; mais, n'ayant point fait de part dans ce travail aux considérations géométriques, il y a commis plusieurs erreurs. La plus saillante consiste, pour compléter le système des équations du problème, à joindre au système des huit équations canoniques et à la somme des carrés des trois intégrales des aires relatives à trois plans coordonnés rectangulaires deux de ces trois intégrales [*]; or il arrive que deux combinaisons de ces trois équations sont renfermées dans le système des équations canoniques [**]. On a cité le travail de Bour dans plusieurs Mémoires de Mécanique, mais, dans aucun que je sache, on n'y a relevé les erreurs qui s'y trouvent.

Dans le Mémoire qui suit, j'emploie l'expression de la force vive trouvée par Bour et à laquelle j'ai été conduit par des considérations géométriques. J'établis le système des huit équations canoniques, puis je montre comment, après l'intégration de ces équations, on achèverait très-aisément la solution. Les solutions théoriques, qu'on a données ordinairement de ce problème, reposent sur des formules tellement compliquées qu'il est impossible de songer à en faire l'application à l'Astronomie; on verra qu'il n'en est pas de même de la suivante, car les formules y sont simples et le choix des variables très-approprié à l'Astronomie.

Sur l'expression de la force vive dans le problème des trois corps.

1. On peut ramener le problème du mouvement de trois corps à celui du mouvement de corps fictifs, au nombre de deux seulement, et

[*] En supposant même que ces deux intégrales soient deux nouvelles équations, il lui manquerait encore une équation pour déterminer complétement la position du système. A la fin de son Mémoire, il suppose très-petite l'inclinaison des orbites des deux corps, et il propose l'emploi d'une fonction perturbatrice qui n'est pas admissible; car, pour qu'une fonction puisse être prise pour fonction perturbatrice, il faut non-seulement qu'elle soit très-petite, mais encore qu'il en soit de même de ses dérivées qui entrent dans les formules de perturbation, ce qui n'a pas lieu dans le cas actuel.

[**] J'ai déjà fait cette remarque dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXXVIII, p. 408, 1874).

soumis à une fonction de forces qui ne dépend que des distances r et r_1 de ces deux corps à un point fixe O pris pour origine des coordonnées et de l'angle formé par ces deux distances. Alors le principe des forces vives et les trois intégrales des aires sont applicables aux deux nouveaux corps aussi bien qu'aux trois premiers. Désignons par m, m_1 les masses des deux corps et par P le plan qui passe par les points O, m et m_1. La position du système et son déplacement infiniment petit sont déterminés : 1° par les rayons vecteurs r, r_1 menés de l'origine O aux deux points m et m_1; 2° par les dérivées de r, r_1 par rapport au temps t; 3° par les angles β, β_1 des rayons r, r_1 avec l'intersection L du plan P avec la position infiniment voisine qu'il occupe au bout de l'instant dt; 4° par les dérivées de β, β_1 par rapport à t; 5° par le déplacement infiniment petit $d\gamma$ de l'axe de rotation L du plan P dans ce plan; 6° enfin par la rotation infiniment petite ωdt du plan P autour de la droite L.

Représentons-nous le mouvement du plan P. La droite L tourne dans ce plan autour de l'origine O et vient au bout de l'instant dt en L_1; puis ce plan tourne autour de L_1 de l'angle infiniment petit ωdt et occupe la position P_1. La droite L tournera ensuite autour du point O dans le plan P_1 d'un angle infiniment petit et ira de la position L_1 à la position L_2; puis le plan P_1 tournera d'un angle infiniment petit autour de L_2, et ainsi de suite. La droite L se meut sur un cône, mais L, par définition, n'est que l'axe de rotation du plan P; par le déplacement de la droite L, il faut donc entendre seulement un changement de l'axe de rotation de ce plan qui varie à chaque instant. L'élément plan renfermé entre les deux droites L et L_1 peut être considéré comme appartenant à la fois au cône et au plan P, et l'on en conclut facilement que ce plan roule sans glisser sur le cône formé par les positions successives de la droite L.

Nous montrerons plus loin quelles modifications on devra faire au système de variables que nous adoptons d'abord, afin de fixer plus commodément la position des deux corps m et m_1.

2. Désignons par A et A_1 les vitesses angulaires de r et de r_1 dans le plan P, estimées à partir d'une droite fixe située dans ce plan et comptons A, A_1, $d\beta$, $d\beta_1$ et $d\gamma$ positivement dans le même sens, nous

aurons

$$(1) \qquad A = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}, \quad A_1 = \frac{d\beta_1}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}.$$

La vitesse du point m se décompose suivant ces trois directions rectangulaires : 1° suivant r; 2° dans le plan P, perpendiculairement à r; 3° normalement au plan P, en ces trois vitesses :

$$\frac{dr}{dt}, \quad rA, \quad \omega r \sin\beta.$$

On a donc, pour la demi-force vive du point m,

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2} r^2 A^2 + \frac{m}{2} \omega^2 r^2 \sin^2\beta,$$

et, pour la demi-force vive du système,

$$T = \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + m_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{2}(mr^2A^2 + m_1 r^2 A_1^2)$$
$$+ \frac{1}{2}\omega^2(mr^2\sin^2\beta + m_1 r_1^2 \sin^2\beta_1),$$

formule dans laquelle A et A_1 ont les valeurs (1).

Rotation instantanée du plan P *autour de la droite* L.

3. Nous avons dit que les trois équations des aires ont lieu pour le système des deux corps m et m_1; il existe donc, pour ce système, un plan invariable, c'est-à-dire un plan du maximum des aires dont la direction est fixe. Formons l'équation des aires relative au plan invariable.

Nous avons trois déplacements infiniment petits du point m, suivant trois directions rectangulaires : 1° un déplacement suivant r, auquel ne correspond aucune aire; 2° un déplacement dans le plan P, perpendiculaire à r, qui a pour valeur $rA\,dt$ et auquel correspond l'aire $\frac{1}{2}mr^2A$, que nous désignerons par $\frac{1}{2}G$; 3° un déplacement normal au plan P, égal à $\omega r \sin\beta\, dt$, auquel correspond l'aire $\frac{1}{2}mr^2\omega\sin\beta$, que nous désignerons par $\frac{1}{2}$K. Menons les axes de ces aires, c'est-à-dire des droites passant par l'origine, perpendiculaires aux plans de ces aires et dont la grandeur soit représentée par le double du nombre qui représente ces aires. L'axe de l'aire $\frac{1}{2}$G est perpendiculaire au plan P; il en est de même de l'axe de l'aire $\frac{1}{2}m_1 r_1^2 A_1$ ou $\frac{1}{2}G_1$, relative au corps m_1; leur résultante est donc égale à leur somme

$$G + G_1. \tag{2}$$

L'aire $\frac{1}{2}$K a son axe situé dans le plan P et perpendiculaire à r; de même l'aire $\frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega\sin\beta_1$ ou $\frac{1}{2}K_1$ a son axe situé dans le plan P et perpendiculaire à r_1. L'axe résultant, qui est la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont ces deux axes, a pour valeur

$$\sqrt{K^2 + K_1^2 + 2KK_1\cos(\beta - \beta_1)}. \tag{3}$$

Enfin, en composant les deux axes perpendiculaires entre eux qui ont les valeurs (2) et (3), on obtient une droite de grandeur constante et perpendiculaire au plan invariable; on a donc l'équation

$$(G + G_1)^2 + K^2 + K_1^2 + 2KK_1\cos(\beta_1 - \beta) = k^2,$$

en désignant par k une constante, que nous appellerons la *grandeur de l'axe* du plan invariable.

L'équation précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned}(G + G_1)^2 + \omega^2\big[m^2 r^4\sin^2\beta + m_1^2 r_1^4 \sin^2\beta_1 \\ + 2mm_1 r^2 r_1^2 \sin\beta\sin\beta_1\cos(\beta_1 - \beta)\big] = k^2,\end{aligned}$$

ou

$$\omega^2 = \frac{k^2 - (G + G_1)^2}{m^2 r^4\sin^2\beta + m_1^2 r_1^4\sin^2\beta_1 + 2mm_1 r^2 r_1^2\sin\beta\sin\beta_1\cos(\beta_1 - \beta)};$$

elle donne, par conséquent, la rotation instantanée $\omega\,dt$ du plan P autour de la droite L.

Formule qui donne le mouvement de la trace du plan P *sur le plan invariable.*

4. Désignons par σ l'angle que fait la trace S du plan P sur le plan invariable avec une droite fixe située dans ce dernier plan; représentons par U l'angle des deux plans, et par φ l'angle de la droite L avec la droite S.

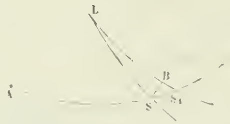
Imaginons une sphère qui ait son centre à l'origine O et soient (*fig.* 1) AS, LS les grands cercles qui représentent sur cette sphère le plan invariable et le plan P; les points S et L indiquent sur la figure les traces des droites S et L sur la sphère. Au bout d'un instant dt le plan P tournant autour de L de l'angle ωdt est représenté par LS_1. Soit A le point à partir duquel on compte l'angle σ, on aura $AS = \sigma$, $SS_1 = d\sigma$, $SLS_1 = \omega dt$, $LSA = U$.

Abaissons l'arc SB perpendiculaire sur LS_1, nous aurons

$$SB = SS_1 \sin SS_1 B = d\sigma \sin U.$$

Du point S abaissons une droite perpendiculaire sur la droite L,

Fig. 1.



qui est un diamètre de la sphère, l'arc SB est égal à cette perpendiculaire, multipliée par ωdt; donc

$$SB = \omega dt \sin\varphi.$$

Égalant ces deux valeurs de SB, on a

$$d\sigma \sin U = \omega dt \sin\varphi.$$

Si nous projetons l'axe k du plan invariable sur une normale au plan P, nous obtenons $k\cos U$ pour la projection ; mais cette quantité est égale à l'axe de la somme des aires relatives au plan P; on a donc

$$k\cos U = G + G_1\,;$$

il en résulte

$$\sin^2 U = \frac{1}{k^2}\left[k^2 - (G+G_1)^2\right],$$

et la formule précédente devient

$$d\sigma = \frac{\omega k \sin U \sin\varphi}{k^2 - (G+G_1)^2}\,k\,dt.$$

Projetons ensuite l'axe k sur la droite L; pour cela, nous le projetterons d'abord sur le plan P, ce qui donnera $k\sin U$, puis nous projetterons cette projection sur L, ce qui donnera finalement $k\sin U\sin\varphi$. D'autre part, cette quantité doit être égale à la somme des aires relatives au plan perpendiculaire à L; elle est, par conséquent, égale à

$$ml\varpi + m_1 l_1 \varpi_1,$$

en désignant par l, l_1 les distances de m, m_1 à la droite L, et par ϖ, ϖ_1 les composantes des vitesses de m et m_1, perpendiculaires au plan P: on a

$$l = r\sin\beta, \qquad l_1 = r_1\sin\beta_1,$$
$$\varpi = \omega r\sin\beta, \quad \varpi_1 = \omega r_1 \sin\beta_1\,:$$

on a donc

$$k\sin U\sin\varphi = \omega\,(mr^2\sin^2\beta + m_1 r_1^2\sin^2\beta_1),$$

et l'expression de $d\sigma$ devient

$$d\sigma = \frac{\omega^2(mr^2\sin^2\beta + m_1 r_1^2\sin^2\beta_1)}{k^2 - (G+G_1)^2}\,k\,dt\,;$$

elle donne le mouvement de la trace du plan P sur le plan invariable.

Emploi de deux nouveaux angles ξ et ξ_1.

5. Désignons par ξ, ξ_1 les angles de r, r_1 avec la droite S d'intersection du plan P avec le plan invariable; β et β_1 sont les angles de r et r_1 avec la droite L; donc, en supposant tous ces angles comptés dans le même sens, on a

$$(a) \qquad \beta_1 - \beta = \xi_1 - \xi.$$

Les axes des aires désignées au n° 3 par $\frac{1}{2}$K et $\frac{1}{2}$K$_1$ sont situés dans le plan P et perpendiculaires à r et r_1; les axes des aires $\frac{1}{2}$G, $\frac{1}{2}$G$_1$, décrites dans le plan P, sont perpendiculaires à ce plan; donc, la projection de l'axe k du plan invariable sur la droite S étant nulle, on aura

$$\mathrm{K}\sin\xi + \mathrm{K}_1 \sin\xi_1 = 0$$

ou

$$(b) \qquad mr^2 \sin\beta \sin\xi + m_1 r_1^2 \sin\beta_1 \sin\xi_1 = 0.$$

Remarquons que les équations (a) et (b) sont symétriques par rapport aux deux couples de variables β, β_1 et ξ, ξ_1.

On tire des équations (a) et (b), en éliminant β_1,

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{-m_1 r_1^2 \sin\xi_1 \sin(\xi_1 - \xi)}{mr^2 \sin\xi + m_1 r_1^2 \sin\xi_1 \cos(\xi_1 - \xi)};$$

on a de même

$$\operatorname{tang}\beta_1 = \frac{mr^2 \sin\xi \sin(\xi_1 - \xi)}{m_1 r_1^2 \sin\xi_1 + mr^2 \sin\xi \cos(\xi_1 - \xi)};$$

on a aussi

$$(c) \qquad \sin^2\beta = \frac{m_1^2 r_1^4 \sin^2\xi_1 \sin^2(\xi_1 - \xi)}{\mathrm{D}},$$

en faisant

$$\mathrm{D} = m^2 r^4 \sin^2\xi + m_1^2 r_1^4 \sin^2\xi_1 + 2mm_1 r^2 r_1^2 \sin\xi \sin\xi_1 \cos(\xi - \xi_1),$$

et une formule semblable pour $\sin^2\beta_1$.

D'après cela, on a

$$m^2 r^4 \sin^2\beta + m_1^2 r_1^4 \sin^2\beta_1 + 2mm_1 r^2 r_1^2 \sin\beta \sin\beta_1 \cos(\beta_1 - \beta) = \frac{m^2 m_1^2 r^4 r_1^4 \sin^4(\xi_1 - \xi)}{D},$$

et l'on déduit de la formule du n° 5

$$(d) \qquad \omega^2 = \frac{[k^2 - (G + G_1)^2] D}{m^2 m_1^2 r^4 r_1^4 \sin^4(\xi_1 - \xi)}.$$

En permutant ξ et ξ_1 avec β et β_1 dans la formule (c), on obtient

$$(e) \qquad \sin^2\xi = \frac{m_1^2 r_1^4 \sin^2\beta_1 \sin^2(\beta_1 - \beta)}{m^2 r^4 \sin^2\beta + m_1^2 r_1^4 \sin^2\beta_1 + 2mm_1 r^2 r_1^2 \sin\beta \sin\beta_1 \cos(\beta_1 - \beta)}.$$

Démonstration géométrique de deux équations.

6. Le déplacement angulaire du point m pendant l'instant dt dans le plan P, par rapport à la droite L supposée fixe, est égal à $A\,dt$, et il peut se décomposer en deux déplacements : 1° le déplacement de m par rapport à la droite S d'intersection de P avec le plan invariable; 2° le déplacement de la droite S par rapport à la droite L.

ξ étant l'angle de r avec S, le premier de ces deux déplacements a pour valeur $d\xi$. Pour calculer le second déplacement, reprenons la figure considérée au n° 4, où les grands cercles AS et LS représentent le plan invariable et le plan P. Le déplacement de la droite S par rapport à la droite L est égal à $S_1 B$ et l'on a

$$S_1 B = d\sigma \cos U;$$

on aura donc

$$A\,dt = d\xi + d\sigma \cos U.$$

Nous avons trouvé, au n° 4, l'équation

$$k \cos U = G + G_1;$$

donc l'équation précédente devient

$$(f) \qquad A = \frac{d\xi}{dt} + \frac{G + G_1}{k}\frac{d\sigma}{dt};$$

on a de même

$$(g) \qquad A_1 = \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{G + G_1}{k}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Nouvelles expressions de $d\sigma$ *et de* T.

7. En nous reportant à l'expression de ω^2, trouvée au n° 5, nous déduisons de la formule (e)

$$\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} = \frac{\omega^2 m_1 r_1^2 \sin^2\beta_1 \sin^2(\beta_1 - \beta)}{k^2 - (G + G_1)^2};$$

nous avons de même

$$\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2} = \frac{\omega^2 mr^2 \sin^2\beta \sin^2(\beta_1 - \beta)}{k^2 - (G + G_1)^2}.$$

Ajoutons ces deux équations, en remarquant que $\beta_1 - \beta$ est égal à $\xi_1 - \xi$, et nous aurons

$$(h) \quad \omega^2(mr^2 \sin^2\beta + m_1 r_1^2 \sin^2\beta_1) = \frac{k^2 - (G + G_1)^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

En remplaçant cette expression dans la dernière formule du n° 4, nous avons la formule

$$(i) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{k}{\sin^2(\xi_1 - \xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

où les angles ξ, ξ_1 entrent au lieu des angles β, β_1.

D'après la formule (h), l'expression de $2T$, trouvée au n° 2, peut s'écrire

$$2T = m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + m_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \frac{G^2}{mr^2} + \frac{G_1^2}{m_1 r_1^2} + R,$$

en posant

$$R = \frac{k^2 - (G + G_1)^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right);$$

on a une autre expression de $2T$ en éliminant k au moyen de l'équation (i); ce qui donne

$$R = -\frac{(G+G_1)^2}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right)+\frac{mm_1r^2r_1^2\sin^2(\xi_1-\xi)}{mr^2\sin^2\xi+m_1r_1^2\sin^2\xi_1}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2.$$

Système de variables conjuguées.

8. Posons

$$\frac{dr}{dt}=r',\quad \frac{dr_1}{dt}=r'_1,\quad \frac{d\xi}{dt}=\xi',\quad \frac{d\xi_1}{dt}=\xi'_1,\quad \frac{d\sigma}{dt}=\sigma';$$

nous aurons, d'après les deux dernières formules du n° 6,

$$\xi' = A - \frac{G+G_1}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

$$\xi'_1 = A_1 - \frac{G+G_1}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

ou

$$(j)\qquad mr^2\xi' = G - \frac{mr^2(G+G_1)}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

$$(k)\qquad m_1r_1^2\xi'_1 = G_1 - \frac{m_1r_1^2(G+G_1)}{\sin^2(\xi_1-\xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1r_1^2}+\frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

Supposons que l'on tire G et G_1 de ces deux équations pour les porter dans la dernière expression obtenue pour $2T$, alors $2T$ ne renfermera plus que les variables

$$r,\ r_1,\ \xi,\ \xi_1$$

et les dérivées

$$r',\ r'_1,\ \xi',\ \xi'_1,\ \sigma';$$

par suite, les quantités

$$p=\frac{dT}{dr'},\quad p_1=\frac{dT}{dr'_1},\quad p_2=\frac{dT}{d\xi'},\quad p_3=\frac{dT}{d\xi'_1},\quad p_4=\frac{dT}{d\sigma'}$$

seront respectivement conjuguées de $r, r_1, \xi, \xi_1, \sigma$.

Calculons p_2 et p_3; nous avons

$$\frac{dT}{d\xi'} = \frac{1}{mr^2} G \frac{dG}{d\xi'} + \frac{1}{m_1 r_1^2} G_1 \frac{dG_1}{d\xi'} - \frac{G + G_1}{\sin^2(\xi_1 - \xi)} \left(\frac{dG}{d\xi'} + \frac{dG_1}{d\xi'}\right) \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

La différentiation des équations (j) et (k), par rapport à ξ', donne

$$mr^2 = \frac{dG}{d\xi'} - \frac{mr^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)} \left(\frac{dG}{d\xi'} + \frac{dG_1}{d\xi'}\right) \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

$$0 = \frac{dG_1}{d\xi'} - \frac{mr^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)} \left(\frac{dG}{d\xi'} + \frac{dG_1}{d\xi'}\right) \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

Multiplions ces deux équations respectivement par $\frac{G}{mr^2}$, $\frac{G_1}{m_1 r_1^2}$, et ajoutons, nous aurons

$$G = \frac{dT}{d\xi'};$$

on a de même $G_1 = \frac{dT}{d\xi'_1}$; les variables G, G_1 sont donc conjuguées à ξ, ξ_1.

Équations différentielles canoniques.

9. En introduisant, dans l'expression de $2T$, les variables p, p_1, G, G_1, p_4, qui sont conjuguées à r, r_1, ξ, ξ_1, σ, on a

$$2T = \frac{p^2}{m} + \frac{p_1^2}{m_1} + \frac{G^2}{mr^2} + \frac{G_1^2}{m_1 r_1^2} + \left[\frac{p_4^2 - (G + G_1)^2}{\sin^2(\xi_1 - \xi)}\right] \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

et, en faisant $H = T - V$, où V désigne la fonction de forces, on a les dix équations différentielles canoniques renfermées dans les deux suivantes :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i},$$

où l'indice i est susceptible des valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et où l'on suppose $q = r$, $q_1 = r_1$, $q_2 = \xi$, $q_3 = \xi_1$, $q_4 = \sigma$.

En faisant $i = 4$, on a les deux équations

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{dp_4}, \quad \frac{dp_4}{dt} = -\frac{dH}{d\sigma} = 0;$$

la seconde prouve que p_4 est constant, et l'on déduit de la première

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{p_4}{\sin^2(\xi_1 - \xi)} \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right),$$

équation déjà obtenue au n° **7** et qui prouve que p_4 est égal à k. Remplaçons, dans l'expression de T et dans celle de H, la quantité p_4 par k, et nous aurons les huit équations canoniques

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{dH}{dp}, & \frac{dp}{dt} &= -\frac{dH}{dr},\\
\frac{dr_1}{dt} &= \frac{dH}{dp_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{dH}{dr_1},\\
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{dH}{dG}, & \frac{dG}{dt} &= -\frac{dH}{d\xi},\\
\frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{dH}{dG_1}, & \frac{dG_1}{dt} &= -\frac{dH}{d\xi_1}.
\end{aligned}$$

Les deux équations

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dH}{dG}, \quad \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{dH}{dG_1}$$

ont été déjà trouvées ci-dessus (n° 8); la première, par exemple, peut en effet s'écrire

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{G}{mr^2} - \frac{G + G_1}{\sin^2(\xi_1 - \xi)} \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).$$

Résumé de la solution.

10. En intégrant le système des huit équations différentielles canoniques données au numéro précédent, et dont une des intégrales est l'équation des forces vives

$$H = \text{const.},$$

nous obtiendrons les variables r, r_1, ξ, ξ_1, qui déterminent les distances de m et m_1 à l'origine, et leurs distances angulaires à la droite S, intersection du plan P avec le plan invariable; ces coordonnées déterminent complétement la position de m et m_1 dans le plan P. Reste à déterminer la position de ce plan; elle sera fixée : 1° par l'angle U que le plan P fait avec le plan invariable et fourni par la formule

$$\cos U = \frac{G + G_1}{k}.$$

2° par le mouvement de la ligne S sur le plan invariable, exprimé par la formule

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{k}{\sin^2(\xi_1 - \xi)}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{m r^2}\right).$$

Quoiqu'il n'y ait pas besoin d'autres variables pour fixer la position du système, on peut remarquer que, les quantités précédentes étant obtenues, on pourra calculer les angles β, β_1 par les formules du n° 5, l'angle instantané de rotation ωdt dont tourne le plan P par la formule (d) du même numéro, et l'angle $d\gamma$ formé par les deux génératrices du cône défini au n° 1, suivant lesquelles les deux positions du plan P au commencement et à la fin de l'instant dt touchent ce cône, au moyen de la formule (n° 2)

$$\frac{G}{mr^2} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}$$

ou

$$d\gamma = \frac{G}{mr^2}dt - d\beta.$$

Sur le rôle des équations des aires dans la théorie précédente.

11. Bour croyait que, pour obtenir toutes les équations du problème, il fallait ajouter aux huit équations canoniques et à l'équation des aires relative au plan invariable deux des intégrales des aires relatives à trois plans fixes de coordonnées rectangulaires. D'après la théorie qui précède, il est évident qu'il n'y a pas lieu d'employer ces deux intégrales; mais je vais démontrer de plus que deux combinaisons des équations des aires sont renfermées dans les équations canoniques.

Pour arriver à cette démonstration, commençons par donner une forme géométrique à la question. Nous avons exprimé au n° 5 que l'axe du plan invariable est de grandeur constante; il reste encore à exprimer que la direction de cet axe est fixe.

Représentons-nous le plan P qui passe par l'origine O (*fig.* 2) et les deux points m, m_1. Au bout de l'instant dt, l'axe de rotation L de ce plan vient en L' dans ce plan, et le plan P tournant de l'angle ωdt autour de L' occupe une seconde position. Dans la première position du plan, menons Og perpendiculaire à L', puis élevons par le point O une droite OZ perpendiculaire à ce plan.

Nous allons projeter l'axe du plan invariable sur les trois droites rectangulaires L', Og, OZ au commencement de l'instant dt; nous les projetterons ensuite sur les mêmes axes à la fin de cet instant, et nous exprimerons que ces projections n'ont pas changé de grandeur.

Nous supposerons que les axes des aires soient menés normalement à leur plan et d'un côté de ce plan, de manière qu'un observateur, placé suivant cet axe, voie la rotation du rayon vecteur qui décrit l'aire s'effectuer de droite à gauche.

L'axe des aires G et G_1 est situé suivant OZ; les axes des aires K et K_1 (n° 5) sont situés dans la première position du plan P et sont perpendiculaires à Om, Om_1. A la fin de l'instant dt, les rayons Om, Om_1 sont venus en Om', Om'_1 dans la seconde position du plan P, et les axes des aires K, K_1 sont venus en K', K'_1 perpendiculaires à Om', Om'_1.

1° Projetons l'axe du plan invariable sur L' au commencement de dt, et, pour cela, projetons ces composantes G, G_1, K, K_1 sur cette droite. La projection de G et G_1 sur L' est nulle; on a ensuite, d'après les notations du n° 2,

$$\text{Angle}\,(K, L) = \frac{\pi}{2} - \beta, \qquad (K_1, L) = \frac{\pi}{2} - \beta_1, \quad (L, L') = d\gamma,$$

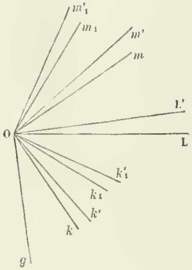
$$(K, L') = \frac{\pi}{2} - \beta + d\gamma, \quad (K_1, L') = \frac{\pi}{2} - \beta_1 + d\gamma;$$

on a donc, pour la projection de l'axe du plan invariable,

$$(a) \quad \begin{cases} K\cos(K, L') + K_1\cos(K_1, L') \\ \quad = K\sin(\beta - d\gamma) + K_1\sin(\beta_1 - d\gamma) \\ \quad = K\sin\beta - K\cos\beta\, d\gamma + K_1\sin\beta_1 - K\cos\beta_1\, d\gamma. \end{cases}$$

Cherchons la même projection au bout de l'instant dt. L'axe de G et G_1, après cet instant, est perpendiculaire à la seconde position du

Fig. 2.



plan P et, par suite, perpendiculaire à la droite L' qui s'y trouve; donc sa projection sur L' est nulle.

On a ensuite

$$(K', L') = \frac{\pi}{2} - \beta - d\beta, \quad (K'_1, L') = \frac{\pi}{2} - \beta_1 - d\beta_1\,;$$

on a donc, pour la projection cherchée,

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} &K' \cos(K', L') + K'_1 \cos(K'_1, L') \\ &\quad = (K + dK)\sin(\beta + d\beta) + (K_1 + dK_1)\sin(\beta_1 + d\beta_1) \\ &\quad = K\sin\beta + \sin\beta\, dK + K\cos\beta\, d\beta + K_1 \sin\beta_1 \\ &\qquad + \sin\beta_1\, dK_1 + K_1 \cos\beta_1\, d\beta_1. \end{aligned} \right.$$

En égalant (a) et (A), on a

$$(\alpha) \quad dK\sin\beta + K\cos\beta(d\beta + d\gamma) + dK_1 \sin\beta_1 + K_1 \cos\beta_1(d\beta_1 + d\gamma) = 0.$$

2° Projetons sur Og. Au commencement de dt, les projections de G et G_1 sont nulles, et celles de K et K_1 sont

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} &K\cos(K, g) + K_1 \cos(K_1, g) \\ &\quad = K\sin(K, L') + K_1 \sin(K_1, L') \\ &\quad = K\cos\beta + K\sin\beta\, d\gamma + K_1 \cos\beta_1 + K_1 \sin\beta_1\, d\gamma. \end{aligned} \right.$$

K' n'est pas situé dans le plan gOL'; mais on peut l'y supposer en négligeant les infiniment petits du second ordre, et l'on a pour sa projection

$$\begin{aligned}(K + dK)\cos K'Og &= (K + dK)\cos(\beta + d\beta)\\ &= K\cos\beta + dK\cos\beta - K\sin\beta d\beta.\end{aligned}$$

On a de même, pour la projection de K'_1,

$$K_1\cos\beta_1 + dK_1\cos\beta_1 - K_1\sin\beta_1 d\beta_1.$$

G et G_1 s'étant changés en $G + dG$, $G_1 + dG_1$, on a, pour la projection de leur résultante,

$$(G + dG + G_1 + dG_1)\sin(\omega dt).$$

On a donc, pour la projection de l'axe du plan invariable à la fin de dt,

$$\text{(B)}\quad \left\{\begin{aligned}&K\cos\beta + dK\cos\beta - K\sin\beta d\beta + K_1\cos\beta_1\\ &\qquad + dK_1\cos\beta_1 - K_1\sin\beta_1 d\beta_1 + (G + G_1)\omega dt;\end{aligned}\right.$$

et, en égalant (b) et (B), on a

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned}&dK\cos\beta - K\sin\beta(d\beta + d\gamma)\\ &\qquad + dK_1\cos\beta_1 - K_1\sin\beta_1(d\beta_1 + d\gamma) + (G + G_1)\omega dt = 0.\end{aligned}\right.$$

3° Projetons sur la normale OZ au plan gOL'. Au commencement de dt on a, pour la projection totale,

$$(c)\qquad G + G_1;$$

à la fin de dt on aura, pour cette projection,

$$(G + dG + G_1 + dG_1)\cos(\omega dt) - K'\sin j - K'_1\sin j_1,$$

en désignant par j et j_1 les angles de K' et K'_1 avec le plan gOL'. La dernière expression peut s'écrire

$$\text{(C)}\quad \left\{\begin{aligned}&G + dG + G_1 + dG_1 - (K + dK)\omega dt\cos(\beta + d\beta)\\ &\qquad - (K_1 + dK_1)\omega dt\cos(\beta_1 + d\beta_1).\end{aligned}\right.$$

En égalant (c) et (C), on obtient

$$(\gamma) \qquad dG + dG_1 - (K\cos\beta + K_1\cos\beta_1)\omega\,dt = 0.$$

Les trois équations (α), (β), (γ) équivalent aux trois intégrales des aires relatives à trois plans de coordonnées rectangulaires; on peut les écrire plus simplement ainsi qu'il suit :

$$(\mathrm{I}) \qquad d(K\sin\beta + K_1\sin\beta_1) + (K\cos\beta + K_1\cos\beta_1)d\gamma = 0,$$

$$(\mathrm{II}) \quad d(K\cos\beta + K_1\cos\beta_1) - (K\sin\beta + K_1\sin\beta_1)d\gamma + (G + G_1)\omega\,dt = 0,$$

$$(\mathrm{III}) \qquad dG + dG_1 - (K\cos\beta + K_1\cos\beta_1)\omega\,dt = 0.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par

$$K\sin\beta + K_1\sin\beta_1, \quad K\cos\beta + K_1\cos\beta_1, \quad G + G_1,$$

et ajoutons; nous aurons, après plusieurs réductions,

$$d[(G + G_1)^2 + K^2 + K_1^2 + 2KK_1\cos(\beta_1 - \beta)] = 0;$$

en intégrant et désignant par k une constante, on retrouve l'équation du n° **5**

$$(\mathrm{IV}) \qquad (G + G_1)^2 + K^2 + K_1^2 + 2KK_1\cos(\beta_1 - \beta) = k^2.$$

12. Les équations (I), (II), (III) peuvent être remplacées par deux d'entre elles, par exemple les équations (I) et (III), et par l'équation (IV). Nous allons transformer ces équations en y introduisant les variables r, r_1, ξ, ξ_1, G, G_1.

Si l'on fait cette transformation pour l'équation (IV), on obtient une identité; donc, par cette transformation, les équations (I), (II), (III) se réduisent à deux.

Opérons d'abord sur l'équation (III), qui est la plus simple. D'après le n° **5**, on a

$$K = mr^2\omega\sin\beta, \quad K_1 = m_1 r_1^2\omega\sin\beta_1,$$

et l'équation (III) devient

$$\frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt} - \omega^2(mr^2\sin\beta\cos\beta + m_1 r_1^2\sin\beta_1\cos\beta_1) = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$\beta_1 - \beta = \xi_1 - \xi = g,$$

nous aurons, d'après le n° 5,

$$\sin\beta\cos\beta = -\frac{1}{D} m_1 r_1^2 \sin\xi_1 \sin g (mr^2 \sin\xi + m_1 r_1^2 \sin\xi_1 \cos g),$$

$$\sin\beta_1\cos\beta_1 = \frac{1}{D} mr^2 \sin\xi \sin g (m_1 r_1^2 \sin\xi_1 + mr^2 \sin\xi \cos g),$$

et ensuite, à cause de la valeur de ω^2 du même numéro,

$$\begin{aligned}\omega^2 (mr^2 \sin\beta\cos\beta &+ m_1 r_1^2 \sin\beta_1\cos\beta_1) \\ = \frac{k^2 - (G + G_1)^2}{mm_1 r^2 r_1^2 \sin^3 g} &\big[(- mr^2 + m_1 r_1^2)\sin\xi\sin\xi_1 \\ &+ (mr^2 \sin^2\xi - m_1 r_1^2 \sin^2\xi_1) \cos g\big].\end{aligned}$$

Donc l'équation (III) devient

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt} \\ & - \frac{k^2 - (G + G_1)^2}{\sin^3 g}\left[\sin\xi\sin\xi_1\left(\frac{1}{mr^2} - \frac{1}{m_1 r_1^2}\right) + \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} - \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right)\cos g\right],\end{aligned}\right.$$

ou plus simplement

$$0 = \frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt} + \frac{k^2 - (G + G_1)^2}{\sin^2 g}\left(\frac{\sin\xi\cos\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin\xi_1\cos\xi_1}{mr^2}\right).$$

C'est l'équation que l'on obtient en ajoutant les deux équations canoniques

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{dH}{d\xi} = -\frac{dT}{d\xi} + \frac{dV}{d\xi},$$

$$\frac{dG_1}{dt} = -\frac{dH}{d\xi_1} = -\frac{dT}{d\xi_1} + \frac{dV}{d\xi_1};$$

ce qui donne, parce que V ne renferme ξ et ξ_1 que par g,

$$\frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt} + \frac{dT}{d\xi} + \frac{dT}{d\xi_1} = 0.$$

13. Faisons la même transformation pour l'équation (1). Le premier membre de cette équation peut se décomposer dans les deux parties semblables

$$(f)\qquad d(K\sin\beta)+K\cos\beta\,d\gamma,\quad d(K_1\sin\beta_1)+K_1\cos\beta_1\,d\gamma;$$

transformons la première partie; elle peut s'écrire, d'après la valeur de $d\gamma$ (n° **10**),

$$(g)\qquad \begin{cases} dK\sin\beta+K\cos\beta\,d\beta+K\cos\beta\left(\dfrac{G}{mr^2}dt-d\beta\right), \\ dK\sin\beta+K\cos\beta\,\dfrac{G}{mr^2}\,dt. \end{cases}$$

Remplaçons, dans la formule

$$K=mr^2\omega\sin\beta,$$

ω, $\sin\beta$ par leurs valeurs obtenues au n° **5**,

$$\omega=\frac{\sqrt{D}\sqrt{k^2-(G+G_1)^2}}{mm_1r^2r_1^2\sin^2 g},\qquad \sin\beta=\frac{m_1r_1^2\sin\xi_1\sin g}{\sqrt{D}},$$

et nous aurons

$$K=\frac{\sin\xi_1\sqrt{k^2-(G+G_1)^2}}{\sin g};$$

nous avons de même

$$K_1=\frac{-\sin\xi\sqrt{k^2-(G+G_1)^2}}{\sin g}.$$

L'expression (g) peut s'écrire

$$\frac{K\,dK}{mr^2\omega}+G\omega\sin\beta\cos\beta\,dt=\frac{1}{\omega}L,$$

en faisant

$$L=\frac{K\,dK}{mr^2}+G\omega^2\sin\beta\cos\beta\,dt.$$

En différentiant K^2, on a

$$\begin{aligned} K\,dK= &-(G+G_1)\frac{\sin^2\xi_1}{\sin^2 g}(dG+dG_1) \\ &+\frac{k^2-(G+G_1)^2}{\sin^3 g}(-\sin\xi\sin\xi_1\,d\xi_1+\sin^2\xi_1\cos g\,d\xi). \end{aligned}$$

et par suite, en remplaçant dans L,

$$\begin{aligned}
L = & - \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2\sin^2 g}(G+G_1)(dG+dG_1) \\
& + \frac{k^2-(G+G_1)^2}{mr^2\sin^3 g}(-\sin\xi\sin\xi_1\,d\xi_1 + \sin^2\xi_1\cos g\,d\xi) \\
& - \frac{k^2-(G+G_1)^2}{mr^2\sin^3 g}G\sin\xi_1\left(\frac{\sin\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin\xi_1\cos g}{mr^2}\right)dt.
\end{aligned}$$

Divisons L par dt et portons, dans les deux premières lignes de L, les valeurs de

$$\frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt}, \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\xi_1}{dt},$$

tirées des équations canoniques. Pour la première valeur, nous adopterons la forme (e)

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{dt} + \frac{dG_1}{dt} = \frac{k^2-(G+G_1)^2}{\sin^3 g}\Bigg[& \sin\xi\sin\xi_1\left(\frac{1}{mr^2} - \frac{1}{m_1 r_1^2}\right) \\
& + \left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} - \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right)\cos g\Bigg];
\end{aligned}$$

nous avons ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{G}{mr^2} - \frac{G+G_1}{\sin^2 g}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right), \\
\frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{G_1}{m_1 r_1^2} - \frac{G+G_1}{\sin^2 g}\left(\frac{\sin^2\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1}{mr^2}\right).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi, pour les deux premières lignes de L divisé par dt, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}
\frac{k^2-(G+G_1)^2}{mr^2}\Bigg\{ & G\left[\frac{\sin\xi\sin\xi_1}{m_1 r_1^2\sin^5 g}(\sin^2\xi + \sin^2\xi_1 - 2\sin\xi\sin\xi_1\cos g) + \frac{\sin^2\xi_1\cos g}{mr^2\sin^3 g}\right] \\
& + G_1\frac{\sin\xi\sin\xi_1}{m_1 r^2\sin^5 g}(\sin^2\xi + \sin^2\xi_1 - 2\sin\xi\sin\xi_1\cos g - \sin^2 g)\Bigg\},
\end{aligned}$$

ou, à cause de $g = \xi_1 - \xi$,

$$\frac{k^2-(G+G_1)^2}{mr^2\sin^3 g}G\sin\xi_1\left(\frac{\sin\xi}{m_1 r_1^2} + \frac{\sin^2\xi_1\cos g}{mr^2\sin^3 g}\right),$$

ce qui est la troisième ligne de L, divisée par dt et prise avec un signe contraire.

L ou l'expression (g) est donc nulle; ainsi la première partie (f) de l'équation (I) est nulle d'après les équations canoniques; il en est de même de la seconde. Il est donc bien vrai que les quatre dernières équations du système canonique renferment deux combinaisons des équations des aires.

14. La démonstration précédente conduit à un résultat curieux. En effet, nous avons prouvé non-seulement que l'équation (I) résulte des équations canoniques, mais encore que l'on a séparément, en vertu de ces équations,

$$d(\mathrm{K}\sin\beta) + \mathrm{K}\cos\beta\, d\gamma = 0,$$
$$d(\mathrm{K}\sin\beta_1) + \mathrm{K}_1\cos\beta_1\, d\gamma = 0;$$

or ces deux formules expriment que le principe des aires a lieu pour chacun des deux corps m, m_1 par rapport à l'axe instantané du plan P. On pourrait démontrer de même que, non-seulement l'équation (II) a lieu, mais qu'on a encore séparément

$$d(\mathrm{K}\cos\beta) - \mathrm{K}\sin\beta\, d\gamma + \mathrm{G}\,\omega\, dt = 0,$$
$$d(\mathrm{K}\cos\beta_1) - \mathrm{K}_1\sin\beta_1\, d\gamma + \mathrm{G}_1\,\omega\, dt = 0,$$

et l'on en conclut que le principe des aires a lieu aussi, pour chacun des deux corps m, m_1 pris séparément, par rapport à la droite Og menée dans le plan du triangle perpendiculairement à l'axe de rotation. Donc le principe des aires a également lieu pour chaque corps par rapport à une droite quelconque située dans le plan P. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si deux corps m et m_1 sont soumis à une fonction de forces qui ne dépend que de leurs distances à l'origine et de l'angle formé par ces deux distances, le théorème des aires a lieu à chaque instant par rapport à toute droite menée par l'origine dans le plan* P *qui passe par m, m_1 et cette origine, non-seulement pour l'ensemble des deux corps m et m_1, mais encore pour chacun de ces deux corps pris séparément.*

Si l'on compose comme des forces les axes des aires K et G, on obtient l'axe des aires résultant pour la masse m, et l'on voit que la projection de cet axe sur une droite quelconque du plan P est la même au commencement et à la fin de l'instant dt. On peut donc encore énoncer le théorème précédent de la manière suivante :

La projection, sur une position du plan P, *de l'axe des aires résultant pour l'une quelconque des masses m et m_1, reste la même au commencement et à la fin de l'instant dt qui suit immédiatement cette position du plan* P.

Car la projection de cet axe sur une droite du plan P s'obtient en projetant cet axe sur le plan P, puis cette projection sur la droite.

Orbites décrites par les deux corps m et m_1.

15. En Astronomie, on imagine que les orbites des corps célestes sont des ellipses dont la forme et la position varient à chaque instant; cette conception n'a d'ailleurs, dans cette Science, une véritable importance qu'à cause de la petitesse des variations des éléments de ces orbites. Nous allons montrer comment on peut déterminer ces orbites et la position des deux corps m et m_1 sur ces orbites au moyen du système de variables que nous avons employé.

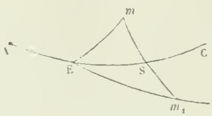
Considérons l'aire décrite pendant le temps dt, par le rayon vecteur r mené au corps m, multipliée par la masse m, quantité qu'on peut regarder comme une aire décrite par un rayon vecteur égal à $r\sqrt{m}$ et de même direction que le premier; concevons de même l'aire décrite par le rayon vecteur $r_1\sqrt{m_1}$ dans le même instant. Prenons les axes de ces aires et menons la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés ces deux axes : cette diagonale représente, en grandeur et en direction, l'axe du plan invariable. Par le point O, origine de ces trois axes, menons-leur des plans perpendiculaires, nous obtiendrons les plans des deux orbites et le plan invariable qui se couperont suivant une seule droite.

Ainsi les plans des deux orbites coupent le plan invariable suivant une même droite passant par le point O et qui se meut dans ce plan.

Imaginons une sphère dont le centre soit au point O; les quatre plans suivants qui passent par ce point, savoir le plan P, les orbites de m et m_1 (*fig.* 3) et le plan invariable, couperont la sphère suivant des grands cercles représentés respectivement par mm_1, Em, Em_1, ES.

Désignons par u et u_1 les inclinaisons des orbites de m et m_1 sur le

Fig. 3.



plan P des trois corps; la tangente de l'angle u est égale au déplacement de m normal à P divisé par le déplacement de m dans P et perpendiculaire au rayon vecteur; on en conclut, en remplaçant ces déplacements par les aires K et G qui leur sont proportionnelles,

$$\tang u = \frac{K}{G}, \quad \tang u_1 = \frac{K_1}{G_1}.$$

Désignons par I l'angle mEm_1 des deux orbites; l'arc mm_1 est égal à g (n° **12**) et le triangle sphérique mEm_1 donne

$$\cos I = \cos u \cos u_1 + \sin u \sin u_1 \cos g,$$

$$\cos I = \frac{G}{\sqrt{K^2+G^2}} \frac{G_1}{\sqrt{K_1^2+G_1^2}} + \frac{K}{\sqrt{K^2+G^2}} \frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+G_1^2}} \cos g.$$

Dans le cas où les masses m et m_1 n'exercent pas entre elles d'actions mutuelles et sont seulement sollicitées par un centre d'attraction situé au point O, le principe des aires pouvant être appliqué à chacun des deux corps dans leurs orbites respectives, on aura

$$(\alpha) \qquad K^2 + G^2 = b^2, \quad K_1^2 + G_1^2 = b_1^2,$$

b et b_1 étant deux constantes et, d'après la formule du n° **5**,

$$(G + G_1)^2 + K^2 + K_1^2 + 2KK_1 \cos g = k^2,$$

on a donc

$$\cos I = \frac{GG_1 + KK_1 \cos g}{bb_1} = \frac{k^2 - b^2 - b_1^2}{2bb_1}.$$

Dans le cas général où les orbites sont variables, on peut encore appliquer cette dernière formule, en considérant b et b_1 comme des quantités variables fournies par les formules (α) ou

$$\frac{[k^2 - (G + G_1)^2]\sin^2\xi_1}{\sin^2 g} + G^2 = b^2, \quad \frac{[k^2 - (G + G_1)^2]\sin^2\xi}{\sin^2 g} + G_1^2 = b_1^2.$$

Cherchons les inclinaisons i et i_1 des plans des deux orbites sur le plan invariable. Si l'on regarde la variable ξ de la figure comme positive, on aura

$$mS = \xi;$$

ξ_1 étant porté en sens contraire, on a

$$m_1 S = -\xi_1 \quad \text{et} \quad mm_1 = -\xi_1 + \xi = -g.$$

On aura aussi

$$mES = i, \quad m_1 ES = -i_1, \quad I = i - i_1, \quad mSA = U.$$

Le triangle mES donne

$$\sin Em = \frac{\sin\xi \sin U}{\sin i} = \frac{\sqrt{k^2 - (G + G_1)^2}\sin\xi}{k \sin i};$$

d'autre part, le triangle mEm_1 donne

$$\sin Em = -\frac{\sin u_1 \sin g}{\sin I} = -\frac{\sin g K_1}{\sin I\sqrt{K_1^2 + G_1^2}},$$

et, puisque l'on a (n° **13**)

$$K_1 = \frac{-\sin\xi\sqrt{k^2 - (G + G_1)^2}}{\sin g},$$

il en résulte

$$(\beta) \qquad \sin Em = \frac{\sqrt{k^2 - (G + G_1)^2}\sin\xi}{b_1 \sin I};$$

égalant les deux valeurs de $\sin Em$, on a

$$\sin i = \frac{b_1 \sin I}{k},$$

on a de même

$$\sin i_1 = -\frac{b \sin I}{k}.$$

Remarquons que la figure formée par les deux triangles EmS, Em_1S est entièrement déterminée quand on a calculé ξ, ξ_1, i, i_1; on pourra achever de fixer la position de la figure sur le plan invariable, lorsqu'on connaîtra l'arc σ représenté par AS, A désignant un point fixe du grand cercle ES.

L'angle σ s'obtient par une quadrature d'après une formule donnée au n° **10**.

Em ou la distance angulaire du corps m au nœud E est donnée par la formule (β) ci-dessus; on a, pour la même quantité relative au corps m_1,

$$\sin \mathrm{E}m_1 = \frac{-\sqrt{k^2-(\mathrm{G}+\mathrm{G}_1)^2}\sin\xi_1}{b\sin \mathrm{I}},$$

Les planètes Jupiter et Saturne ayant des masses beaucoup plus considérables que les autres planètes, leur mouvement elliptique est surtout troublé par leurs actions mutuelles, et cette circonstance, que cinq fois le moyen mouvement de Saturne moins deux fois celui de Jupiter est une très-petite quantité, achève de donner une grande prédominance à ces actions mutuelles. Or, si l'on néglige les actions des autres planètes, on pourra étudier le mouvement de ces deux corps, en y appliquant le problème des trois corps pour lesquels on prendra le Soleil, Jupiter et Saturne : c'est ce que je ferai dans un autre Mémoire, en appliquant la théorie précédente.

Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace (suite);

Par M. HALPHEN.

§ II.

25. Ce paragraphe sera consacré à des applications de quelques-uns des théorèmes obtenus dans le précédent. Je donnerai d'abord une application du théorème III. Celle que je choisis nous conduira à une démonstration nouvelle d'une formule qui attira, il y a quelques années, l'attention des géomètres. Au point de vue du problème posé au début de ce Mémoire, cette application présente aussi cette particularité remarquable, que non-seulement il paraît presque impossible de réussir à former l'équation de la courbe Φ, dont nous allons chercher le degré, mais qu'il semble même bien difficile de mettre sous une forme entièrement explicite l'équation différentielle que je vais considérer.

Une courbe plane de degré μ est, comme on sait, déterminée par un nombre P de points,

$$P = \frac{\mu(\mu+3)}{2}.$$

Je considère l'équation différentielle des courbes de degré μ, qui, dans un plan, passent par $P - n = k$ points donnés. Les points d'une courbe S, qui satisfont à la condition exprimée par cette équation différentielle, sont ceux en lesquels il existe un contact d'ordre n entre S et une courbe de degré μ, passant par les k points donnés.

L'équation différentielle s'obtient en égalant à zéro un déterminant Δ composé : 1° de k lignes telles que

(A) $\quad 1, \quad x_j, \quad y_j, \quad x_j^2, \quad \ldots, \quad x_j y_j^{\mu-1}, \quad y_j^\mu, \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$

où x_j, y_j sont les coordonnées de l'un des k points donnés; 2° de la ligne

(B) $\quad 1, \quad x, \quad y, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x y^{\mu-1}, \quad y^\mu;$

3° des n lignes (C) formées avec les dérivées 1ières, 2ièmes, ..., $n$ièmes des termes de (B).

Sans développer ce déterminant, sans lui faire subir presque aucune transformation, on va voir qu'il est facile de calculer immédiatement α et β. J'aurai, pour ce calcul, besoin de faire appel à la proposition suivante, que je laisse au lecteur le soin facile de démontrer :

Soit D *un déterminant composé de la ligne*

$$z^{q_0}, \quad z^{q_1}, \quad z^{q_2}, \quad \ldots, \quad z^{q_n},$$

et des n lignes obtenues en prenant successivement les dérivées 1ières, 2ièmes, ..., $n$ièmes des termes de la première. Soit Q *le produit des différences des exposants q, savoir :*

$$Q = (q_n - q_0)(q_{n-1} - q_0)\ldots(q_1 - q_0)(q_n - q_1)(q_{n-1} - q_1)\ldots \\ \times (q_2 - q_1)\ldots(q_n - q_{n-1}),$$

on a

$$D = Q z^{\Sigma q - \frac{n(n+1)}{2}}.$$

26. Pour calculer α, conformément au théorème III, je substitue à y, dans Δ, un développement procédant suivant les puissances entières et ascendantes de $(x - \xi)^{\frac{1}{2}}$ et commençant par une constante, et je cherche la partie principale du résultat. Je pose $x - \xi = z$. Dans la ligne (B), chaque terme de la forme x^q, étant développé, contient toutes les puissances entières de z, depuis la puissance zéro jusqu'à la puissance q. Chaque terme de la forme $x^q y^p$ devient un développement procédant suivant les puissances ascendantes et entières de $z^{\frac{1}{2}}$ et commençant par une constante. Par des combinaisons linéaires convenables, on amènera la ligne (B) à se composer de termes dont les parties principales sont les suivantes :

$$(\mathrm{B}') \qquad 1, \quad z^{\frac{1}{2}}, \quad z, \quad z^{\frac{3}{2}}, \quad z^2, \quad \ldots, \quad z^{\frac{p-1}{2}}, \quad z^{\frac{p}{2}}.$$

Par ces combinaisons, les lignes (A) restent composées de constantes. Quant aux lignes (C′), transformées des lignes (C), elles se composent des dérivées des termes de la ligne (B′), prises par rapport à z; car les dérivées, prises par rapport à x ou à z, sont les mêmes. Par suite, les parties principales des termes des lignes (C′) sont les dérivées, par rapport à z, des parties principales des termes de (B′). Donc, après la substitution, la partie principale de Δ est, à un facteur constant près, celle d'un déterminant formé : 1° d'une ligne dont les termes sont $(n+1)$ termes de (B′); 2° de n lignes composées des dérivées successives des termes de la précédente. Les $(n+1)$ termes doivent être choisis dans (B′), de manière que l'ordre de la partie principale du déterminant ainsi formé soit le plus petit possible.

Or un déterminant ainsi composé est un cas particulier du déterminant D considéré au numéro précédent.

On voit immédiatement que l'ordre le plus petit possible, pour un pareil déterminant, s'obtient en prenant les $(n+1)$ termes de gauche de (B′). Cet ordre minimum ne peut s'obtenir que par cette seule combinaison, ainsi que cela résulte de la proposition ci-dessus; donc c'est bien le degré de la partie principale de Δ; par suite, le degré de la partie principale de Δ est

$$0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{n}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = - \frac{n(n+1)}{4}.$$

Mais, d'après le théorème III, ce degré est égal à $-\frac{\alpha}{2}$. Donc

$$\alpha = \frac{n(n+1)}{2}.$$

27. Pour calculer β, je substitue à y, dans Δ, un développement procédant suivant les puissances descendantes et entières de x, commençant par un terme du premier degré, et, conformément au théorème III, je cherche le degré de la partie principale dans le résultat. Le calcul est ici analogue au précédent. Par des combinaisons linéaires, je change la ligne (B) en une ligne (B″), composée de termes qui, ordonnés suivant les puissances descendantes de x, ont les parties principales suivantes :

$$(\mathrm{B}'') \qquad x^{\mu-p}, \quad x^{\mu-p+1}, \quad \ldots, \quad x^{\mu-1}, \quad x^{\mu}.$$

Les lignes (C″), transformées des lignes (C), sont composées des dérivées des termes de (B″). En répétant les raisonnements ci-dessus, on voit que le degré de Δ est celui du déterminant formé avec les $(n+1)$ derniers termes écrits dans (B″) et les dérivées de ces termes. Ce degré est donc

$$\mu+(\mu-1)+(\mu-2)+\ldots+(\mu-n)-\frac{n(n+1)}{2}=(n+1)(\mu-n).$$

D'après le théorème III, ce degré est aussi égal à β; donc

$$\beta=(n+1)(\mu-n).$$

J'ai donc la proposition suivante :

Théorème XI. — *Les points d'une courbe plane* S, *de degré* m, *en chacun desquels il existe un contact d'ordre* n *entre cette courbe et une courbe de degré* μ *passant par* $\frac{\mu(\mu+3)}{2}-n$ *points donnés dans le plan de* S, *sont les intersections de* S *avec une autre courbe dont le degré est*

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{M} &= \frac{n(n+1)}{2}(m-1)+(n+1)(\mu-n) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}(m-3)+(n+1)\mu. \end{aligned} \right.$$

Si la courbe S n'a aucune singularité, le nombre des points considérés est mM. C'est en quoi consiste la formule remarquable à laquelle j'ai fait allusion au début de ce paragraphe (n° **25**), et qui est due à M. de Jonquières [*].

[*] *Comptes rendus*, t. LXIII, p. 423. *Voyez* aussi une Note de M. Cayley, *ibid.*, p. 666.

28. Les résultats fournis par la formule (35) présentent, dans quelques cas, avec l'énoncé du théorème XI lui-même, des désaccords apparents, dont il ne sera peut-être pas inutile de dire quelques mots.

Je suppose, par exemple, $\mu = 2$, $n = 5$. La formule (35) donne alors

$$M = 15m - 33.$$

Les points de la courbe S, dont il s'agit ici, sont ce qu'on appelle, d'après M. Cayley, les points *sextactiques*. Or on sait qu'ils sont les intersections de S et d'une courbe de degré

$$M' = 12m - 27 \text{ [*]}.$$

Il y a donc là un désaccord qu'il s'agit d'expliquer. La différence $(M - M')$ est égale à $3(m - 2)$. C'est le degré de la courbe *hessienne*, dont les intersections avec S sont les points d'inflexion de S. Cette circonstance suggère l'idée que, dans ce cas, la courbe de degré M se décompose peut-être en la hessienne et la courbe de degré M'. C'est, en effet, ce qui a lieu. *A priori*, on s'en rend compte en remarquant qu'une tangente d'inflexion, comptée deux fois, peut être considérée comme une conique ayant, avec la courbe, six points d'intersection réunis au point d'inflexion. Au point de vue algébrique, voici comment cette circonstance est mise en évidence. Si, dans le cas actuel, on effectue le calcul du déterminant Δ, on y trouve le facteur $\frac{d^2y}{dx^2}$. Voici le résultat, où j'emploie des accents pour désigner les dérivées :

$$(36) \qquad \Delta = y'' \begin{vmatrix} \frac{y'''}{6} & \frac{y''}{2} & 0 \\ \frac{y^{\text{IV}}}{24} & \frac{y'''}{6} & \frac{y''}{2} \\ \frac{y^{\text{V}}}{120} & \frac{y^{\text{IV}}}{24} & 2\frac{y'''}{6} \end{vmatrix} = y''f.$$

Ainsi l'équation différentielle se décompose en deux autres : $y'' = 0$,

[*] Ce résultat est dû à M. Cayley (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 590).

$f = 0$; par suite aussi, la courbe de degré M se décompose en la hessienne et en une seconde courbe.

29. Je suppose, en second lieu, $\mu = 3$, $n = 8$, $m = 3$. Il s'agit ici, non plus d'une courbe S, de degré quelconque, mais d'une courbe du troisième degré. En un quelconque ω des points considérés, une autre courbe Σ, du troisième degré, a un contact du huitième ordre avec S, tout en passant par un point donné a. Or toutes les courbes du faisceau, déterminé par S et Σ, ont en ω, avec S, des contacts du huitième ordre. On voit par là que chaque point, tel que ω, ne dépend pas du point a. Les points dont il s'agit sont ceux en lesquels *neuf points consécutifs de la courbe* S *sont les intersections de deux courbes du troisième degré*. Mais les points d'inflexion de S satisfont à cette condition; car, si $T = 0$ est l'équation d'une tangente d'inflexion, toutes les courbes du faisceau $S + \lambda T^3 = 0$ ont, avec S, au point d'inflexion, un contact du huitième ordre. Pour cette raison, il se présente ici, dans le calcul, une décomposition de l'équation différentielle analogue à celle du numéro précédent.

Je n'entrerai pas ici dans d'autres détails à ce sujet. Je me contente d'observer que la formule (35) donne, pour le cas actuel, $M = 27$. Si l'on en retranche le degré de la hessienne qui est égal à 3, on trouve que les points ci-dessus sont les intersections de la cubique avec une courbe du vingt-quatrième degré. Dans le cas d'une cubique de sixième classe, ils sont donc au nombre de $3 \times 24 = 72$.

30. J'applique maintenant le théorème V à l'équation différentielle du n° **25**, et je conclus que :

Théorème XII. — *Sur une courbe plane, qui ne contient que des branches simples, et dont la classe et le degré sont c et m, le nombre des points en chacun desquels il existe un contact d'ordre n entre cette courbe et une autre courbe de degré μ, qui passe en $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés, est*

$$N = \frac{n(n+1)}{2}(c - 2m) + (n+1)\mu m. \tag{37}$$

A cause des remarques du n° **28**, pour le cas des points sextactiques, on devra retrancher $3(c-m)$, et la formule se réduit à $12c-15m$.

A cause des remarques du n° 29, pour avoir le nombre des points ω d'une cubique de la quatrième classe, on devra retrancher celui des points d'inflexion qui est égal à 3. On trouve alors que le nombre des points ω est égal à 6 pour une cubique de quatrième classe.

31. Pour compléter la formule (37), il faudrait tenir compte des singularités quelconques des courbes S, suivant les principes exposés au n° 15. Je n'entreprendrai pas de résoudre un problème aussi difficile, et je me bornerai à tenir compte des rebroussements ordinaires, de manière à pouvoir faire l'application du théorème IX.

Un rebroussement ordinaire est représenté par

$$x-\xi=t^2,\quad y-\eta=\mathrm{A}t^2+\mathrm{B}t^3+\mathrm{C}t^4+\ldots,$$

ou, si l'on veut, par un développement de y suivant les puissances ascendantes et entières de $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, commençant par une constante, mais où manque le terme en $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$. En employant ce développement, on voit, d'après le n° 17, que si on le substitue à y, dans Δ, la partie principale du résultat sera de l'ordre $-\frac{7}{2}\cdot$ Par suite, le calcul de γ ne diffère de celui de α (n° 26) qu'en ce que, dans la ligne (B′), le terme dont la partie principale est $z^{\frac{1}{2}}$ manque ici. L'ordre de la partie principale du résultat est, par suite, augmenté de $\frac{n}{2}$; par suite, on a

$$\gamma=\alpha-n=\frac{n(n-1)}{2}\cdot$$

Donc le théorème IX donne ici le suivant :

THÉORÈME XIII. — *Sur une courbe, de degré m, de classe c, ne contenant que des branches simples et des branches à rebroussement ordinaire, ces dernières au nombre de* $\varkappa$, *le nombre des points en chacun desquels il existe un contact d'ordre n entre cette courbe et une autre* *courbe de degré* μ, *qui passe par* $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ *points donnés, est*

$$(38) \qquad N = \frac{n(n+1)}{2}(c-2m) + (n+1)\mu m + \frac{n(n-1)}{2}\iota.$$

Pour les points sextactiques, en tenant compte de la remarque faite précédemment (n° **28**), la formule (38) devra être réduite à $12c - 15m + 9\iota$ [*].

Pour les points ω (n° **29**), on trouvera que, sur une cubique de troisième classe, leur nombre se réduit à zéro Ce résultat, comme on le verra plus loin, pouvait être prévu et sert de vérification (*voir* n° **32**).

Connaissant les trois coefficients α, β, γ relatifs à l'équation différentielle envisagée, je puis, conformément au n° **17**, trouver par les formules (23) les coefficients α', β', γ' relatifs à l'équation différentielle qui se déduit de la proposée par une transformation corrélative. J'obtiens ainsi la proposition suivante :

Théorème XIV. — *Les points d'une courbe plane* S, *de degré* m, *en chacun desquels cette courbe a un contact d'ordre* n *avec une courbe de classe* μ, *qui touche* $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ *droites données, sont les intersections de* S *avec une autre courbe dont le degré est*

$$(39) \qquad M = \left[(n+1)\mu + \frac{n(n-5)}{2}\right](m-1) - (n-2)n.$$

Si la courbe S *ne contient que des branches simples et des rebroussements ordinaires, ces derniers au nombre de* ι, *et que sa classe soit* c, *le nombre des points est*

$$(40) \quad N = \left[(n+1)\mu + \frac{n(n-5)}{2}\right]c - n(n-2)m + \frac{n(n-1)}{2}\iota.$$

La formule (39) ne paraît pas donner lieu à des observations analogues à celles que j'ai faites plus haut (n^{os} **28** et **29**), à propos de la

---

[*] Cette formule coïncide avec une de celles qu'a données M. Cayley (*Comptes rendus*, t. LXIII, p. 10). M. Zeuthen a également donné cette formule.

formule (35). Par exemple, pour $\mu = 2, n = 5$, elle donne bien $M = 12m - 27$, comme cela doit être.

Mais, pour ce cas particulier, la formule (40) donne à son tour un résultat en apparence inexact. A la décomposition Δ en deux facteurs, dont l'un est y'' (n° 28), correspond ici une diminution d'une unité dans le degré de l'équation différentielle par rapport à y''. Par suite, dans le cas envisagé, le coefficient γ n'est pas égal à 10, comme l'indique la formule (40), mais il s'abaisse à 9, comme plus haut.

32. Nous avons trouvé, dans le numéro précédent, que, sur une cubique de troisième classe, le nombre des points ω en lesquels neuf points consécutifs de la courbe sont les pivots d'un faisceau de courbes du troisième degré, se réduit à zéro. De même aussi on trouverait, d'après un autre résultat du même numéro, que, sur la même courbe, le nombre des points sextactiques est également zéro. Ces deux propriétés pouvaient être prévues. On sait, en effet, qu'une cubique de troisième classe peut être, par une infinité de transformations homographiques, changée en elle-même. On peut notamment faire en sorte qu'un point arbitraire m de la courbe (sauf le point d'inflexion et le point de rebroussement) ait pour transformé un autre point arbitraire m' de la même courbe. Si donc un point m de la cubique de troisième classe jouissait de la propriété attribuée aux points ω, ou bien encore était un point sextactique, il en serait de même de tous les points de la courbe, car ces propriétés se conservent dans toute transformation homographique. Il est donc prouvé qu'aucun point de la courbe ne peut jouir de ces propriétés. Pour la même raison, le nombre des points d'une cubique de troisième classe, jouissant d'une propriété que n'altère aucune transformation homographique, se réduit toujours à zéro.

La même remarque s'applique à toutes les courbes susceptibles de se transformer en elles-mêmes par des transformations homographiques qui permettent de faire correspondre entre eux deux points arbitraires de la courbe. L'étude des lignes qui jouissent de cette propriété a fait l'objet de plusieurs travaux dus à MM. Klein et Lie [*]. Parmi

[*] *Math. Ann.*, *Comptes rendus*, année 1870.

ces lignes se trouvent les courbes planes dont l'équation homogène est

$$x^p y^q = A z^{p+q}, \tag{41}$$

A étant une constante. Ces courbes ont été aussi considérées par M. Fouret [*]. Quelques mots suffiront à établir la propriété dont il s'agit, à l'égard des courbes représentées par (41).

Considérons la substitution

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz'. \tag{42}$$

La transformée de (41) est

$$x'^p y'^q = \frac{c^{p+q}}{a^p b^q} A z'^{p+q}.$$

Il suffit donc que l'on ait $c^{p+q} = a^p b^q$ pour que la transformée coïncide avec la courbe première. Dans cette transformation, le triangle de référence ne change pas, et les sommets de ce triangle sont les seuls points qui coïncident respectivement avec leurs transformés. Si dans (42) on suppose que x, y, z et x', y', z' soient les coordonnées de deux points arbitraires m, m' de la courbe (41), ces équations déterminent a, b, c, et, par suite, la transformation homographique; mais alors la condition $c^{p+q} = a^p b^q$ se trouve satisfaite. Donc on peut, par une transformation homographique, changer la courbe (41) en elle-même, de manière qu'un point arbitraire m de la courbe ait pour transformée un point arbitraire m' de la même courbe. Il y a toutefois exception pour les sommets du triangle de référence. Je n'aurai à considérer ici que les cas où la courbe (41) est algébrique. Il faut et il suffit pour cela que les nombres p et q soient commensurables. On peut alors, sans restreindre la généralité, les supposer *entiers*, *positifs* et *premiers entre eux*. Alors la courbe (41) passe aux deux sommets ($x = 0$, $z = 0$) et ($y = 0$, $z = 0$) du triangle de référence et non au troisième. Ces deux sommets sont des points singuliers. En ($x = 0$, $z = 0$), la courbe se compose d'un système circulaire

---

[*] *Comptes rendus*, année 1874.

de branches où l'on a $r = p$, $\rho = q$. En $(y = 0, z = 0)$, on a un système circulaire $r = q$, $\rho = p$. Il est manifeste que la courbe ne possède en dehors de ces deux points ni inflexion, ni singularité, car les singularités se conservent dans toute transformation homographique.

Toutes les fois qu'on considérera une condition que n'altèrent pas les transformations homographiques, les courbes (41) pourront servir d'utile vérification; car on devra trouver que les points satisfaisant à la condition y sont tous réunis aux deux points singuliers. Pour cette vérification, on aura besoin de connaître la classe de la courbe (41). Or cette courbe jouit encore de la propriété de se reproduire elle-même par des transformations corrélatives qui n'altèrent pas le triangle de référence. Cette propriété, qui a été signalée par les auteurs précités, se démontre aisément. Je ne m'y arrête pas. Je me borne à faire remarquer que les deux points singuliers, dans ces transformations, se permutent entre eux. Je ferai à la courbe (41) l'application des théorèmes VIII et X.

33. Pour appliquer le théorème VIII, il nous faut connaître le nombre i' relatif à la courbe (41). D'après la définition de i', ce sera $(p - q)$ ou $(q - p)$, suivant que le premier ou le second de ces nombres sera positif. Soit $q < p$, on aura

$$N = (\alpha + \beta)(p + q) + \gamma(p - q).$$

Or $(\alpha + \beta)$ est essentiellement positif, ainsi qu'on l'a vu au n° 17. Quant à γ, c'est le degré de l'équation différentielle relativement à $\frac{d^2y}{dx^2}$. Donc γ est aussi positif et ne peut être nul; donc N ne peut jamais être nul. Rapprochant ce résultat de celui du numéro précédent, je conclus que :

A l'exception de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (à laquelle le théorème VIII ne s'applique pas), *il n'existe aucune différentielle algébrique du second ordre, qui se reproduise elle-même par toute transformation homographique.*

34. J'applique maintenant à la courbe (41) le théorème X, relatif à une équation différentielle du troisième ordre. Soient λ, μ et λ', μ' les coefficients qui correspondent à $\frac{\rho}{r} = \frac{q}{p}$ et à $\frac{\rho}{r} = \frac{p}{q}$. On aura, théorème X,

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} N = {} & (\alpha + \beta)(p + q) + \lambda(p - q) + \mu(2p - q) \\ & + \lambda'(q - p) + \mu'(2q - p). \end{aligned} \right.$$

Je vais chercher s'il est possible que l'équation différentielle considérée se reproduise elle-même par les transformations homographiques. Si cela est on devra, d'après le n° **32**, avoir $N = 0$, quels que soient p et q, entiers, positifs et premiers entre eux. On aura donc nécessairement

$$\alpha + \beta + \lambda + 2\mu - \lambda' - \mu' = 0,$$

$$\alpha + \beta - \lambda - \mu + \lambda' + 2\mu' = 0;$$

d'où je conclus

$$2\lambda + 3\mu = 2\lambda' + 3\mu'.$$

Soient m, m' les sommets du contour (C) (n° **21**), dont les coordonnées sont, pour m, $u = \lambda + \mu$, $v = \lambda + 2\mu$, et, pour m', $u' = \lambda' + \mu'$, $v' = \lambda' + 2\mu'$. La dernière relation donne $u + v = u' + v'$. Les points m, m' doivent donc être situés sur une même parallèle à la droite $u + v = 0$, ce qui ne se peut, à cause des limites de la partie utile du contour, sans que m et m' coïncident. Mais les points m, m', qui correspondent à deux valeurs réciproques de $\frac{\rho}{r}$, aussi écartées que l'on veut, puisque p et q sont arbitraires, ne peuvent coïncider que si la partie utile de (C) se réduit à un seul sommet; mais alors λ se réduit à zéro. Cette supposition, jointe à $\mu' = \mu$, réduit (43) à la forme

$$N = (\alpha + \beta + \mu)(p - q).$$

Or $(\alpha + \beta)$ ne peut être négatif (n° **17**); quant à μ, c'est un nombre essentiellement positif, qui ne peut être nul. C'est, en effet, le degré de l'équation par rapport à $\frac{d^3y}{dx^3}$. Donc N ne peut être nul; donc :

Il n'existe aucune équation différentielle du troisième ordre algé-

brique, qui se reproduise elle-même par toute transformation homographique.

Le théorème X ne s'applique pas à l'équation $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Mais, comme cette équation ne se reproduit pas par les transformations homographiques, le dernier énoncé ne subit aucune restriction.

35. Dans les recherches déjà citées plus haut, MM. Klein et Lie ont eu l'occasion de s'occuper d'équations différentielles qu'une série de transformations homographiques changent en elles-mêmes. Celles dont il s'agit ici, et dont la non-existence vient d'être démontrée pour le troisième ordre, doivent se reproduire par toute transformation homographique, ainsi que cela se présente pour l'équation du second ordre des lignes droites, l'équation du cinquième ordre des coniques, etc. De même que dans la théorie des formes, la Géométrie fournit *a priori* la conception d'un nombre indéfini de telles équations. Mais la recherche directe de ces équations, dont les premiers membres, mis sous forme entière, pourraient être appelés des *invariants différentiels,* offre un sujet d'études qui ne me semble pas avoir encore été abordé, et qui naturellement ne se restreint pas au cas d'une seule variable indépendante. J'espère pouvoir, dans une autre occasion, m'occuper de ce sujet. Je montrerai alors que cette théorie se rattache directement à celle des invariants des formes. Sans entrer dans des détails qui seraient ici déplacés, j'ai cru devoir solliciter l'attention sur une théorie dont, par une voie bien indirecte, les résultats des n^os^ 33 et 34 fournissent deux propositions. J'aurai d'ailleurs encore à en parler dans la suite de ce Mémoire.

§ III.

36. Lemme. — *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des variables indépendantes, et y une fonction définie par l'équation* $S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = 0$. *Le produit d'une quelconque des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de y par $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{2n-1}$ est égal à une fonction entière des dérivées partielles de* S.

Le lecteur démontrera aisément cette proposition. En répétant les raisonnements employés aux nos 2 et 3, on obtiendra la proposition suivante, qui est l'extension des théorèmes I et II :

THÉORÈME XV. — *Si* $S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y)$ *est un polynôme entier, et que l'on distingue par le signe* $\equiv$ *les égalités qui ont lieu en vertu de* $S = 0$, *il existe des exposants* α *et des polynomes entiers* ψ, *propres à vérifier la relation*

$$(44)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^\alpha f \equiv \psi(x_1, x_2 \ldots x_k, y),$$

f *étant une fonction entière de* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, y *et des dérivées de* y. *La valeur minima de* α *est celle qui fait acquérir au premier membre de cette relation une valeur finie et différente de zéro, pour tout système de valeurs des variables faisant évanouir* $\frac{\partial S}{\partial y}$.

Soit donnée, dans (44), à l'exposant α sa valeur minima, et supposons choisi, pour le polynôme ψ du second membre, un de ceux, du plus petit degré possible, qui satisfont à la relation indiquée. Soit M le degré de ψ. De même qu'au n° 5, on voit que tout polynôme entier, qui, égalé à zéro, définit avec $S = 0$ les systèmes de valeurs de $x_1, \ldots, y$ satisfaisant à l'équation $f = 0$, les dérivées étant prises dans l'équation $S = 0$, est de la forme $(LS + P\psi)$, L et P étant des polynômes entiers. Par suite, le degré minimum d'un tel polynôme distinct de S est M; et sa forme, pour le degré M, est $LS + \psi$, le degré de L étant égal à la différence de ceux de ψ et de S.

Par suite, si β est le degré qu'acquiert f quand on y suppose pour les variables un système de valeurs infinies, et si m est le degré de S, on aura

$$M = \alpha(m - 1) + \beta.$$

Les nombres α et β ne dépendent que de l'équation $f = 0$. On obtient donc ici le même résultat que dans le cas d'une seule variable indépendante.

Il nous faut maintenant chercher le moyen de calculer α et β. Il ne serait pas impossible d'étendre au cas actuel le théorème III; mais, en premier lieu, pour faire cette extension, il me faudrait établir diverses propositions préparatoires dont le développement serait assez long;

en outre, je n'obtiendrais pas ainsi, pour le calcul des nombres α et β, un procédé simple et facile comme celui qui résulte du théorème III. Je bornerai donc à étendre au cas actuel le théorème IV, qui ne subira, comme on va le voir, pour ainsi dire aucune altération.

Cette proposition ne donne pas, il est vrai, un moyen expéditif de calculer α et β, en général; mais il est un cas particulier, encore fort étendu, où elle donnera le résultat sous une forme immédiatement explicite.

On pourrait imiter ici le mode d'analyse employé pour la démonstration du théorème IV, et l'on n'y rencontrerait aucune difficulté nouvelle. Je préfère donner une démonstration différente, qui, bien entendu, s'applique également au théorème IV lui-même. Cette proposition se trouvera ainsi démontrée de deux manières.

37. Je substitue d'abord à l'équation $S = 0$ une équation homogene, par l'introduction d'une variable nouvelle z. Soit m le degré de S, je pose

$$(45)\qquad z^m S\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, \ldots, \frac{x_k}{z}, \frac{y}{z}\right) = T(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z).$$

Soit M le degré de ψ, je pose aussi

$$z^M \psi\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, \ldots, \frac{x_k}{z}, \frac{y}{z}\right) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z).$$

Les polynômes T et φ, des degrés m et M, sont homogènes par rapport aux $(k+2)$ variables. J'emploierai maintenant pour les dérivées partielles la notation usitée dans la théorie des formes

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = T_i, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = T_{k+1}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = T_{k+2}.$$

De (45) je déduis

$$(46)\qquad z^{m-1}\frac{\partial S}{\partial y} = T_{k+1}.$$

Je suppose que l'on ait remplacé également dans f les lettres $x_1, \ldots, y$

par $\frac{x_1}{z}, \ldots, \frac{y}{z}$. A cause de (46), la relation (44) devient

$$z^{M-\alpha(m-1)} T^{\alpha}_{k+1} f = \varphi, \tag{47}$$

cette égalité ayant lieu en vertu de $T = 0$.

Je fais maintenant une transformation homographique, c'est-à-dire, à cause de la variable complémentaire, une substitution linéaire homogène. Je distingue par des accents les nouvelles variables. Le résultat de la substitution dans f ne dépend que des rapports de $(k+1)$ variables à la $(k+2)^{ième}$. J'y prends pour variables indépendantes $\frac{x'_1}{z'}, \frac{x'_2}{z'}, \ldots, \frac{x'_k}{z'}$, et pour fonction $\frac{y'}{z'}$. J'égale à zéro le résultat, je chasse les dénominateurs, je supprime les facteurs étrangers, et j'obtiens finalement une nouvelle équation $f' = 0$, mise sous forme entière, et qui est la transformée de $f = 0$.

Soit T' le transformé de T. Le polynôme entier T' et la fonction différentielle f' donnent lieu à une relation analogue à (47), savoir

$$z'^{M-\alpha(m-1)} T'^{\alpha}_{k+1} f' = \varphi', \tag{48}$$

cette égalité ayant lieu en vertu de $T' = 0$. Dans (48), j'ai admis les mêmes valeurs que dans (47) pour M et α. On pourrait craindre que cette supposition ne fût pas légitime. Pour lever cette objection, il suffit d'admettre que T et f, au lieu d'être les fonctions proposées tout d'abord, en soient des transformées par une substitution homographique quelconque; alors T' et f', qui sont des transformées de ces dernières par une substitution homographique quelconque, le sont aussi des fonctions primitives, exactement comme T et f. Je ferai donc cette supposition, qui sera facilement écartée dans le résultat; par suite, la relation (48) est entièrement établie.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, y, z)$ un système de valeurs des premières variables, qui satisfasse à $T = 0$ et à $\varphi = 0$. D'après (47), pour ce système de valeurs et les dérivées partielles correspondantes, prises dans $T = 0$, l'équation $f = 0$ est satisfaite. Cette propriété se conserve dans la transformation, c'est-à-dire que pour le système de valeurs des secondes variables, qui correspond au proposé, et les dérivées partielles correspondantes, prises dans $T' = 0$, l'équation $f' = 0$ est satisfaite.

Si donc, dans φ, qui est une fonction à la fois de $x_1, \ldots, y, z$ et des coefficients de T et de f, je regarde les variables $x_1, \ldots, y, z$ comme exprimées en fonction de $x'_1, \ldots, y', z'$, et en même temps les coefficients de T et de f comme exprimés en fonction de ceux de T′ et de f', l'équation $\varphi = 0$, envisagée de ce point de vue, fournit les solutions de $T' = 0$ et $f' = 0$, exactement comme l'équation $\varphi' = 0$. Mais le polynôme φ, ainsi envisagé, est du degré M par rapport à $x'_1 \ldots y'_1 z'$, comme φ'; donc, suivant une remarque du numéro précédent, φ est de la forme $K\varphi + LT'$, K étant une constante, c'est-à-dire que, φ étant entendu comme je viens de le dire, on a (en vertu de $T' = 0$)

$$K\varphi' = \varphi.$$

Si les substitutions qui viennent d'être faites dans φ sont faites aussi dans le premier membre de (47), cette relation a maintenant lieu en vertu de $T' = 0$. En y remplaçant alors φ par $K\varphi'$ et comparant à (48), j'obtiens

$$(49)\qquad f = K\left(\frac{z'}{z}\right)^{M-\alpha(m-1)}\left(\frac{T'_{k+1}}{T_{k+1}}\right)^{\alpha} f',$$

dans laquelle les premières variables sont exprimées en fonction des secondes, et en même temps les coefficients de T et de f en fonction de ceux de T′ et de f'. L'égalité a lieu d'ailleurs en vertu de $T' = 0$.

En vertu de la substitution employée, on aura pour T_{k+1} une expression de la forme

$$(50)\qquad T_{k+1} = a_1 T'_1 + a_2 T'_2 + \ldots + a_k T'_k + A T'_{k+1} + \mathcal{A} T'_{k+2},$$

dans laquelle $a_1, \ldots, A, \mathcal{A}$ sont des constantes, à savoir les coefficients de y dans les expressions de $x'_1, \ldots, y', z'$ en fonction des premières variables. Mais on a

$$\frac{\partial y'}{\partial x'_i} = -\frac{T_i}{T'_{k+1}}, \qquad -z' T'_{k+2} = x'_1 T'_1 + x'_2 T'_2 + \ldots + x'_k T'_k + y' T'_{k+1}.$$

Par suite, on déduit de (50), en faisant $z' = 1$,

$$\frac{T_{k+1}}{T'_{k+1}} = -\left(a_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + a_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + a_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k}\right) + A + \mathcal{A}\left(x'_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + x'_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k} - y'\right) = R,$$

et, en même temps, la relation (49) devient, par cette supposition,

$$f = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}^{\alpha} z^{\mathrm{M}-\alpha(m-1)}} f',$$

l'égalité ayant lieu en vertu de $\mathrm{T}' = 0$. De cette relation, le polynôme T' a disparu d'une manière explicite; cependant la constante K et le nombre $[\mathrm{M} - \alpha(m-1)]$ paraissent encore en dépendre. Quant à α, on sait déjà qu'il en est indépendant; mais, comme la relation a lieu, quel que soit le polynôme T', on en déduira aisément que K et $\mathrm{M} - \alpha(m-1)$ en sont indépendants, et que cette relation est une identité. En désignant $[\mathrm{M} - \alpha(m-1)]$ par la lettre β, on a donc l'identité

$$f = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}^{\alpha} z^{\beta}} f'; \tag{51}$$

d'où résulte

$$\mathrm{M} = \alpha(m-1) + \beta.$$

38. Voici donc l'extension du théorème IV :

Lemme. — *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k, y$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, y'$ deux systèmes de variables, liés par une transformation homographique*

$$x'_1 = \frac{a_1 y + b_1 x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots}, \quad x'_2 = \frac{a_2 y + b_2 x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots}, \quad \ldots,$$

$$x'_k = \frac{a_k y + b_k x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots}, \quad y' = \frac{\mathrm{A} y + \mathrm{B} x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots},$$

et z le dénominateur commun des expressions de $x_1, \ldots, y$ en fonction de $x'_1, \ldots, y'$.

Soit $f = 0$ une équation entière aux dérivées partielles entre les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_k$ et la fonction y; soit aussi $f' = 0$ l'équation entière aux dérivées partielles entre les nouvelles variables indépendantes $x'_1, \ldots, x'_k$ et la fonction y', cette équation étant la transformée de la première. Si l'on désigne par K *une constante et par* R *la quantité*

$$\mathrm{R} = \left(a_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + a_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + a_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k}\right)$$
$$- \mathrm{A} + \mathcal{A}\left(x'_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + x'_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k} - y'\right),$$

on a, entre f et f', l'identité

$$f = \frac{K}{R^\alpha z^\beta} f',$$

dans laquelle α et β sont des entiers, dont le premier est toujours positif.

Théorème XVI. — *Soit $S = 0$ une équation algébrique de degré m entre $x_1, \ldots, x_k, y$. Les systèmes de valeurs de ces variables, qui, avec les dérivées partielles, prises dans $S = 0$, satisfont en même temps à l'équation aux dérivées partielles $f = 0$, sont ceux qui vérifient, avec $S = 0$, une autre équation algébrique dont le degré est $\alpha(m-1)+\beta$.*

Si l'on veut emprunter le langage géométrique pour l'espace à $(k+1)$ dimensions et appeler *surface* l'être défini par *une* équation, on peut donner au théorème XVI la forme suivante :

Les points d'une surface algébrique de degré m qui satisfont à une condition exprimée par l'équation $f = 0$ sont les intersections de cette surface avec une autre, dont le degré est $\alpha(m-1)+\beta$.

59. Pour calculer α et β d'après le théorème XVI et le lemme qui le précède, il faudra, dans chaque cas, effectuer la transformation homographique. On serait ainsi entraîné dans des calculs généralement impraticables, à cause de leur longueur. On remarquera toutefois qu'il n'est pas nécessaire d'employer une transformation homographique de forme générale. Ainsi, pour calculer α, il suffira d'employer une simple substitution linéaire (changement de coordonnées). De la sorte, z se réduira à l'unité. Pour calculer β, on pourra employer une transformation qui réduise R à une constante. C'est en procédant de la sorte que je vais faire voir comment les valeurs de α et de β peuvent être immédiatement trouvées dans un cas particulier qui offre un intérêt spécial : c'est celui où l'équation $f = 0$ se reproduit elle-même par toute substitution homographique. Je me trouve ainsi conduit à parler encore de ces *invariants différentiels* dont j'ai déjà dit quelques mots plus haut (n° 55). Je vais d'abord démontrer, au sujet d'une classe d'équations un peu plus étendue, une proposition des plus simples, que j'ai déjà eu l'occasion d'employer ailleurs (*) :

Si une équation aux dérivées partielles reste inaltérée par toute substitution linéaire, elle ne contient ni les variables, ni les dérivées du premier ordre.

1° Soit x une des variables indépendantes. Si l'on change x en $(x+\lambda)$, ce qui constitue une substitution linéaire, aucune dérivée n'est altérée : donc le seul changement que subisse l'équation est celui de x en $(x+\lambda)$; mais, par hypothèse, l'équation reste inaltérée : donc elle ne contient pas x. Le même raisonnement s'applique à y : donc l'équation ne contient ni les variables indépendantes, ni la fonction.

2° Si l'on change y en $y+\lambda x_i$, ce qui constitue une substitution linéaire, la seule dérivée $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est altérée : donc, par le même raisonnement, et comme on sait déjà que y n'entre pas dans l'équation, on voit que $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ n'y entre pas non plus : donc la proposition est démontrée.

40. Pour le calcul de β, il est commode d'employer la transformation suivante :

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k},\\ x'_2 &= \frac{x_2}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x'_k &= \frac{x_k}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k},\\ y' &= \frac{y}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k}.\end{aligned}\right.$$

D'après le lemme du n° **38**, on voit que, avec cette substitution, R se réduit à l'unité. Je poserai

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} z' &= 1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k,\\ z &= 1-(B_1x'_1+B_2x'_2+\ldots+B_kx'_k).\end{aligned}\right.$$

(*) *Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 31.

La transformation réciproque de (52) est

$$x_1 = \frac{x'_1}{z}, \quad x_2 = \frac{x'_2}{z}, \quad \ldots, \quad x_k = \frac{x'_k}{z}, \quad y = \frac{y'}{z},$$

en sorte que z désigne, comme au n° **39**, le dénominateur de cette transformation. Entre z et z', on trouve aisément la relation $zz' = 1$.

Je vais chercher les expressions des dérivées relatives aux variables $x_1, \ldots$ en fonction des dérivées relatives aux variables $x'_1, \ldots$. A cet effet, j'emploie la formule de Taylor. Soient $(x'_1, \ldots, y')$ un système de valeurs des variables, et $\xi'_1, \ldots, \eta'$ leurs accroissements. En posant

$$1.2.3\ldots i.u_i = \left(\frac{\partial}{\partial x'_1}\xi'_1 + \frac{\partial}{\partial x'_2}\xi'_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x'_k}\xi'_k\right)^{(i)} y',$$

j'ai, par la formule de Taylor,

$$(54) \qquad y' + \eta' = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

Soient maintenant $(x_1, \ldots, y)$ et $(\xi_1, \ldots, \eta)$ les valeurs et les accroissements des autres variables, qui correspondent aux valeurs et aux accroissements des premières, que je viens de considérer. Par (52), j'exprime $x'_1, \ldots, y'$ et $\xi'_1, \ldots, \eta'$ en fonction de $x_1, \ldots, y$ et $\xi_1, \ldots, \eta$. Je substitue dans (54). Cela fait, je mettrai le résultat sous la forme

$$(55) \qquad y + \eta = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots,$$

où U_i désignera une forme de degré i en $\xi_1, \ldots, \xi_k$, dont les coefficients seront des fonctions de ceux des formes u_i. De (55) je déduirai

$$1.2\ldots i.U_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_k}\xi_k\right)^{(i)} y.$$

Cette dernière relation me donnera les expressions des dérivées d'ordre i de y par rapport aux variables $x_1, \ldots$ en fonction des coefficients des formes u_i ou des dérivées de y' par rapport aux variables $x'_1, \ldots$.

Je désigne par ζ' l'accroissement de la variable z' (53)

$$\zeta' = B_1\xi_1 + B_2\xi_2 + \ldots + B_k\xi_k.$$

De la dernière équation (52), je conclus

$$y'+\eta' = \frac{y+\eta}{z'+\zeta'} = z\frac{y+\eta}{1+z\zeta'},$$

$$(56)\qquad y+\eta = \frac{1+z\zeta'}{z}(u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots).$$

Dans la parenthèse du second membre de (56), il faut maintenant introduire les quantités $\xi_1, \ldots$ au lieu de $\xi'_1, \ldots$. Des équations (52), je déduis

$$(57)\qquad \xi'_i = \frac{x_i+\xi_i}{z'+\zeta'} - \frac{x_i}{z'} = \frac{z'\xi_i - x_i\zeta'}{z'(z'+\zeta')} = z\frac{\xi_i - x'_i\zeta'}{1+z\zeta'}.$$

Je considère la substitution

$$(58)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi'_1 = \xi_1 - x'_1\zeta' = \xi_1 - x'_1(B_1\xi_1+\ldots+B_k\xi_k),\\ \xi'_2 = \xi_2 - x'_2\zeta' = \xi_2 - x'_2(B_1\xi_1+\ldots+B_k\xi_k),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \xi'_k = \xi_k - x'_k\zeta' = \xi_k - x'_k(B_1\xi_1+\ldots+B_k\xi_k). \end{array}\right.$$

Pour effectuer dans le second membre de (56) la substitution (57), il n'y aura qu'à effectuer dans chaque forme u_i la substitution (58) et à multiplier ensuite par $\left(\frac{z}{1+z\zeta'}\right)^i$. Soit donc v_i la forme u_i transformée par la substitution (58). On aura

$$(59)\qquad y+\eta = \frac{1+z\zeta'}{z}\left(u_0+\frac{v_1 z}{1+z\zeta'}+\frac{v_2 z^2}{(1+z\zeta')^2}+\frac{v_3 z^3}{(1+z\zeta')^3}+\cdots\right).$$

Si l'on développe chaque terme de la parenthèse suivant les puissances ascendantes de ζ' et qu'on prenne l'ensemble des termes du degré i en $\xi_1, \ldots, \xi_k, \zeta'$, on aura U_i. J'ai donc

$$(60)\qquad U_i = z^{i-1}\left(v_i - \frac{i-2}{1}v_{i-1}\zeta' + \frac{(i-2)(i-3)}{1.2}v_{i-2}\zeta'^2+\cdots\right),$$

ce qui peut symboliquement s'écrire

$$U_i = z^{i-1}[v_2(v-\zeta')^{i-2}].$$

Je vais maintenant examiner quelles conséquences on en peut tirer dans le cas où l'on considère une équation algébrique aux différences partielles qui se reproduit elle-même par toute transformation homographique.

41. Soit $f = 0$ une telle équation, mise sous forme entière. D'après le nº **39**, nous savons qu'elle ne contient ni les variables, ni les dérivées du premier ordre. Si donc, comme précédemment, on désigne par U_i la forme

$$1.2\ldots i.\,U_i = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(i)} y,$$

on voit que f est une fonction entière des coefficients des formes U_2, U_3,.... Considérons, pour un instant, une substitution linéaire homogène qui ne modifie que les variables indépendantes

$$(61)\qquad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = b_1 x_1 + c_1 x_2 + \ldots + l_1 x_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_k = b_k x_1 + c_k x_2 + \ldots + l_k x_k. \end{array}\right.$$

Je donne à u_i le même sens que précédemment, et appliquant dans cette forme la substitution (61) par rapport aux variables $\xi'_1, \ldots, \xi'_k$, je la change en une autre w_i. Il est manifeste que l'on a $U_i = w_i$. Ainsi, quand la transformation homographique envisagée est simplement la substitution (61), on n'a, pour passer de f à f', qu'à effectuer, dans les formes U, une substitution linéaire. Mais, par hypothèse, f' reproduit f, sauf un facteur qui (nº **38**) ne dépend ici que des coefficients de la substitution (61). Donc f est une fonction des coefficients des formes U, jouissant de la propriété *d'invariance*, c'est-à-dire sur laquelle une substitution linéaire, faite dans les formes, a pour effet de la multiplier simplement par un facteur qui ne dépend que des coefficients de la substitution. Actuellement, nous ne savons pas encore si ce facteur est une puissance du déterminant de la substitution : c'est pourquoi je ne dis pas que f soit un *invariant* [*].

---

[*] On sait, par la théorie des formes, qu'il ne peut en être autrement. J'ai cru cependant intéressant de dispenser ici le lecteur de la connaissance de cette proposition.

Pour abréger le langage, au lieu de dire : faire, dans les formes U, la substitution (61), je dirai simplement : *faire la substitution* $U_i = w_i$, c'est-à-dire déduire de cette équation et des analogues les expressions des coefficients des formes U en fonction de ceux des formes u, et les substituer dans la fonction f considérée. La propriété d'invariance consiste en ce que, à un facteur λ près, le résultat est la même fonction portant sur les coefficients des formes u. Si l'on fait la substitution $U_i = A^i w_i$, A étant une constante, c'est multiplier, dans (61), les coefficients par A; par suite, c'est encore faire une substitution linéaire, dont l'effet est de multiplier λ par une certaine puissance de A.

La substitution $U_i = A^{i-1} w_i$ revient à faire la substitution $U_i = A^i w_i$, et à diviser ensuite chaque coefficient des formes par A. Donc, si f est homogène, la substitution $U_i = A^{i-1} w_i$ a pour effet de multiplier f par un facteur. Il n'en est rien si f n'est pas homogène. En effet, soit

$$f = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots,$$

où je suppose $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ homogènes et respectivement des degrés $\delta, \delta', \delta'', \ldots$. Il est manifeste que $\varphi, \varphi', \ldots$ doivent jouir séparément de la propriété d'invariance pour que f en jouisse elle-même. Par suite, si f jouit de cette propriété, il faut que la substitution $U_i = A^i w_i$ ait pour effet de multiplier $\varphi, \varphi', \ldots$ par le même facteur μ. Alors la substitution $U_i = A^{i-1} w_i$ a pour effet de multiplier $\varphi, \varphi', \ldots$ par $\mu A^{-\delta}$, $\mu A^{-\delta'}, \ldots$; donc, *pour que la substitution* $U_i = A^{i-1} w_i$ *reproduise* f, *à un facteur près, il faut et il suffit que* f *soit homogène.*

Je reviens maintenant à la considération de la transformation homographique (52). D'après nos conventions de langage et d'après la formule (60), nous obtenons le résultat de cette transformation homographique en faisant la substitution

$$(62) \qquad U_i = z^{i-1}\left[v_i - \frac{i-2}{1} v_{i-1} z' + \frac{(i-2)(i-3)}{1.2} v_{i-2} z'^2 - \ldots \right].$$

Par hypothèse, cette substitution a pour effet de multiplier f par un facteur θ, qui ne dépend pas des coefficients des formes $U_2, \ldots$. On remarquera que le second membre de (62) est homogène par rapport aux coefficients des formes u; donc, si f n'est pas homogène, l'effet de la substitution (62) est de multiplier par θ chacune des fonctions partielles φ, φ',....

Ainsi une quelconque φ de ces fonctions se multiplie par θ, quand on fait la substitution (62). Si l'on fait la substitution plus simple $U_i = z^{i-1} v_i$, nous savons que φ se multiplie aussi par un facteur ν qui ne dépend pas non plus des coefficients des formes. Or il est manifeste que cette dernière substitution et la substitution (62) donnent lieu à certains termes qui sont entièrement les mêmes de part et d'autre : ce sont ceux qui contiennent les coefficients de la forme u d'indice le plus élevé. Donc les facteurs θ et ν sont égaux. Ainsi les fonctions φ, φ', ... se reproduisent respectivement, multipliées par le même facteur θ, quand on fait la substitution $U_i = z^{i-1} v_i$; donc, d'après un résultat précédent, leurs degrés sont les mêmes. Donc *f est homogène.*

J'ajoute cette conclusion, qui permettra bientôt de calculer β. *Soit λ le facteur par lequel se multiplie f quand on fait la substitution* $U_i = v_i$. *Soient ∂_2, ∂_3, ..., ∂_i, ... les degrés auxquels entrent respectivement, dans un terme de f, les coefficients des formes* U_2, U_3, ..., U_i,.... *Quand on fait la transformation homographique* (52), *f se reproduit, multipliée par λ et par z, à la puissance* $\partial_2 + 2\partial_3 + \ldots + (i-1)\partial_i + \ldots$, *nombre qui est le même, quel que soit le terme considéré dans f.*

Je vais maintenant employer une nouvelle transformation homographique, propre au calcul de α; c'est de ce calcul combiné avec les précédents résultats que je pourrai, en dernière analyse, tirer des conclusions définitives.

42. Pour le calcul de α, je considère la substitution suivante :

$$(63)\quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = a_1 y + b_1 x_1 + c_1 x_2 + \ldots + l_1 x_k, \\ x'_2 = a_2 y + b_2 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + l_2 x_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_k = a_k y + b_k x_1 + c_k x_2 + \ldots + l_k x_k, \\ y' = y. \end{array} \right.$$

Je vais chercher les expressions des dérivées partielles relatives aux variables x_1,... en fonction des dérivées relatives aux variables x'_1,....

Par un raisonnement analogue à celui qui a été employé pour la première partie de la proposition du n° **39**, on voit que ces expressions ne contiennent pas les variables. On peut donc, sans modifier les expressions demandées, les chercher pour un système de valeurs particulières des variables, par exemple

$$x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_k = y' = 0,$$
$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = y = 0.$$

Grâce à cette hypothèse, les accroissements des variables, que je désigne par les mêmes notations que précédemment, sont liés par les formules (63), où les lettres $x, \ldots$ sont remplacées par les lettres $\xi, \ldots$.

J'ai maintenant à traiter le même problème qu'au n° **40**, à savoir : du développement

$$(64) \qquad \eta' = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

donné par la formule de Maclaurin, déduire le développement

$$\eta = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots.$$

A cet effet, je substitue dans (64) à $\xi'_1, \ldots, \eta'$ les expressions en $\xi_1, \ldots, \eta$ données par (63), je remplace ensuite η par $U_1 + U_2 + \ldots$, et j'égale, dans les deux membres, les termes du premier, du second ordre.... Ces égalités déterminent successivement les formes U_1, $U_2, \ldots$.

Je pose, pour abréger,

$$\frac{\partial y'}{\partial x'_i} = p'_i, \quad (i = 1, 2, \ldots k),$$

$$(65) \qquad 1 - (a_1 p'_1 + a_2 p'_2 + \ldots + a_k p'_k) = R.$$

$$(66) \qquad \begin{cases} b_1 p'_1 + b_2 p'_2 + \ldots + b_k p'_k = BR, \\ c_1 p'_1 + c_2 p'_2 + \ldots + c_k p'_k = CR, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_1 p'_1 + l_2 p'_2 + \ldots + l_k p'_k = LR. \end{cases}$$

Je cherche d'abord les termes du premier ordre dans les deux membres. Dans le premier, j'ai U_1, et dans le second

$$(1 - R) U_1 + BR\xi_1 + CR\xi_2 + \ldots + LR\xi_k.$$

Les égalant à U_1 j'en conclus

$$U_1 = B\xi_1 + C\xi_2 + \ldots + L\xi_k. \tag{67}$$

Je cherche les termes du second ordre. Dans le premier membre, j'ai U_2. Dans le second membre, j'ai des termes de deux sortes : 1° $(1-R)U_2$; 2° la forme u_2, transformée par la substitution que l'on obtient en remplaçant dans les k premières équations (63) $x_1, \ldots, x'_1, \ldots$ par $\xi_1, \ldots, \xi'_1, \ldots$ et y par U_1 ; c'est-à-dire par la substitution

$$(68)\quad \begin{cases} \xi'_1 = (b_1 + a_1 B)\xi_1 + (c_1 + a_1 C)\xi_2 + \ldots + (l_1 + a_1 L)\xi_k, \\ \xi'_2 = (b_2 + a_2 B)\xi_1 + (c_2 + a_2 C)\xi_2 + \ldots + (l_2 + a_2 L)\xi_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi'_k = (b_k + a_k B)\xi_1 + (c_k + a_k C)\xi_2 + \ldots + (l_k + a_k L)\xi_k. \end{cases}$$

Je désigne par V_2 la forme u_2 transformée par cette substitution (68). J'ai par suite

$$U_2 = (1 - R)U_2 + V_2,$$

$$U_2 = \frac{1}{R} V_2.$$

Je passe maintenant aux termes du troisième ordre. Dans le premier membre, j'ai U_3. Dans le second membre, j'ai trois sortes de termes : 1° $(1-R)U_3$; 2° les termes qui proviennent de u_2. Soit $u_2 = \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$. Désignons par $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ les dérivées partielles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, transformées par la substitution (68). Les termes du troisième ordre fournis par u_2 sont

$$(a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_k\psi_k)U_2 = \frac{a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_k\psi_k}{R} V_2 = \rho V_2,$$

où ρ est une fonction des dérivées du deuxième ordre, mais non pas de celles du troisième ordre; 3° la forme u_3 transformée par la substitution (68). Je la désigne par V_3. J'ai donc

$$U_3 = (1 - R)U_3 + \rho V_2 + V_3,$$

$$U_3 = \frac{1}{R}(V_3 + \rho V_2). \tag{69}$$

La loi est maintenant manifeste. On obtiendra, en général,

$$(70) \qquad U_i = \frac{1}{R}(V_i + \rho_1 V_{i-1} + \rho_2 V_{i-2} + \ldots + \rho_{i-2} V_2),$$

formule dans laquelle V_j désigne, en général, la forme u_j transformée par la substitution (68), et ρ_j une forme d'ordre j, dont les coefficients sont des fonctions entières de ceux des formes u dont les indices sont moindres que i, la forme u_1 exceptée.

45. La formule (70) n'est pas homogène par rapport aux coefficients des formes $u_2, u_3, \ldots$, car le premier terme y est linéaire et homogène, les autres y sont de degré supérieur à l'unité. Or, par hypothèse, f, par la substitution (70), se reproduit, multipliée par un facteur ne dépendant pas des coefficients des formes $u_2, u_3, \ldots$. J'en ai déjà conclu que f est homogène : donc aussi je vois que la propriété de f exige que, par la substitution (70), tous les termes contenant les formes ρ disparaissent d'eux-mêmes. Donc la substitution (70) produit le même effet que la simple substitution $U_i = \frac{V_i}{R}$.

De là je tire cette première conclusion : *Soit μ le facteur par lequel se multiplie f, considérée comme fonction des coefficients des formes* U_2, $U_3, \ldots$, *quand on fait la substitution* (68) (*qui se représente par* $U_i = V_i$), *et δ le degré de f. Considérée comme fonction de dérivées partielles, f se multiplie par* $\mu R^{-\delta}$, *quand on fait la transformation* (63).

Le lemme du n° **38** nous fait connaître déjà, sous une autre forme, ce même facteur. Ici on a $z = 1$, et la quantité désignée par R est la même. Donc $\mu R^{-\delta} = K R^{-\alpha}$, ou

$$(71) \qquad \mu = \frac{K}{R^{\alpha-\delta}}.$$

Nous ne connaissons pas l'expression de K, mais nous savons (n° **38**) que cette quantité est une fonction seulement des coefficients de la transformation employée, qui est ici représentée par les formules (63). Ainsi K dépend seulement des quantités $(a_1, b_1, c_1, \ldots, l_1)$, $(a_2, b_2, c_2, \ldots, l_2), \ldots, (a_k, b_k, c_k, \ldots, l_k)$. Quant à μ, c'est une fonction également inconnue des coefficients de la substitution (68). Dans ces coefficients entrent les quantités nouvelles B, C, ..., L. Cette circonstance va permettre de conclure de (71) la forme de la fonction μ.

La fonction μ dépend de k^2 quantités $(\beta_1, \gamma_1, \ldots, \lambda_1)$, $(\beta_2, \gamma_2, \ldots, \lambda_2)$... et satisfait à (71) quand on y fait

$$(72)\quad \begin{cases} \beta_1 = b_1 + a_1\mathrm{B}, & \gamma_1 = c_1 + a_1\mathrm{C}, & \ldots, & \lambda_1 = l_1 + a_1\mathrm{L}, \\ \beta_2 = b_2 + a_2\mathrm{B}, & \gamma_2 = c_2 + a_2\mathrm{C}, & \ldots, & \lambda_2 = l_2 + a_2\mathrm{L}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots, \\ \beta_k = b_k + a_k\mathrm{B}, & \gamma_k = c_k + a_k\mathrm{C}, & \ldots, & \lambda_k = l_k + a_k\mathrm{L}. \end{cases}$$

Je forme le déterminant de ces k^2 quantités, et je le désigne par Δ. Soit aussi Δ_0 sa valeur quand on fait évanouir les lettres a. On reconnaîtra sans peine, à cause des équations (65) et (66), que l'on a

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{\mathrm{R}}.$$

Par suite, $\Delta^{\alpha-\delta}$ est une fonction qui jouit, comme μ, de la propriété représentée par l'équation (71), c'est-à-dire que $\Delta^{\alpha-\delta}$ est égal à une fonction ne dépendant pas de B, C, ..., L, divisée par la puissance $(\alpha-\delta)$ de R. Je dis qu'il en résulte $\mu = \Delta^{\alpha-\delta}$.

Je désigne par F le quotient de μ par $\Delta^{\alpha-\delta}$.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que F, pour les valeurs (72) de ses arguments, est indépendante de B, C, ..., L. Je prends sa dérivée par rapport à B, après substitution des valeurs (72). Cette dérivée doit être identiquement nulle. J'ai donc

$$(73)\qquad a_1\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\beta_1} + a_2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\beta_2} + \ldots + a_k\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\beta_k} = 0.$$

Je fais maintenant $\mathrm{B} = \mathrm{C} = \ldots = \mathrm{L} = 0$. Alors les lettres a n'entrent plus dans F, et l'identité (73) exige que chaque dérivée partielle soit identiquement nulle. On obtient des résultats analogues en prenant les dérivées par rapport à C, ..., L. Donc toutes les dérivées du premier ordre de F sont identiquement nulles; donc F est une constante. Il suffit de considérer la substitution *unité* pour voir que cette constante est l'unité. Donc *f est un invariant de formes simultanées U_2, U_3, ..., et le poids de cet invariant est $(\alpha - \delta)$.*

44. Je reviens maintenant à la conclusion du n° **41**. Le déterminant de la substitution (58) est, comme on le vérifie aisément, égal à

$$z = 1 - (B_1 x'_1 + B_1 x'_2 + \ldots + B_k x'_k).$$

Donc le facteur λ, dont il s'agit dans l'énoncé qui termine le n° **41**, est $z^{\alpha-\delta}$, ou, en désignant par p le poids de l'invariant, $\lambda = z^p$. Or on a

$$kp = 2\partial_2 + 3\partial_3 + \ldots + i\partial_i + \ldots;$$

par suite,

$$\partial_2 + 2\partial_3 + \ldots + (i-1)\partial_i = kp - (\partial_2 + \partial + \ldots + \partial_i) = kp - \delta.$$

Donc, quand on fait la transformation homographique du n° **40** (52), f se multiplie par $z^{(k+1)p-\delta}$. Rapprochant ce résultat du théorème XVI, j'en conclus

$$\beta = -(k+1)p + \delta,$$

auquel il faut joindre

$$\alpha = p + \delta.$$

Donc, enfin, le degré $M = \alpha(m-1) + \beta$ de l'équation mentionnée au théorème XVI se met sous la forme

$$M = (p + \delta)m - (k+2)p.$$

D'où cette proposition :

Théorème XVII. — *Soit $f = 0$ une équation algébrique aux dérivées partielles entre la fonction y et les k variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_k, qui jouisse de la propriété de rester inaltérée par toute transformation homographique. Cette équation étant mise sous forme entière, f est un invariant homogène des formes simultanées U_2, U_3, ..., définies par la relation*

$$1.2.3\ldots iU_i = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(i)} y,$$

où ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k sont les variables de ces formes.

Soit p le poids de cet invariant et δ son degré.

Les points d'une surface algébrique de degré m (dans l'espace à $(k+1)$ dimensions) *qui satisfont à la condition exprimée par l'équation $f=0$ sont les intersections de cette surface avec une autre dont le degré est*

$$M = (p+\delta)m - (k+2)p.$$

45. Je ferai, au sujet de l'analyse précédente, une remarque. Dès qu'une fonction f des dérivées partielles ne contient ni les variables, ni les dérivées du premier ordre, il est manifeste qu'elle ne change pas quand on change x_i en $(x_i+\lambda)$ ou y en $(y+\mu)$, ou encore y en $y+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_k x_k+\lambda_{k+1}$. Par suite, si l'équation $f=0$ reste inaltérée par la substitution du n° 65, elle reste inaltérée par toute substitution linéaire. En outre, la substitution composée successivement de la transformation homographique (52) et d'une substitution linéaire revient à une transformation homographique quelconque. On a donc dans ce qui précède les éléments pour reconnaître les conditions nécessaires et suffisantes à l'invariance d'une équation telle que $f=0$. On peut les résumer comme il suit :

1° Les conditions mentionnées au théorème XVII : f est un invariant homogène des formes simultanées U_2, U_3, ...;

2° La substitution (60)

$$U_i = z^{i-1}\left(v_i - \frac{i-2}{1} v_{i-1}\zeta' + \ldots\right)$$

y produit le même effet que la substitution $U_i = z^{i-1} v_i$;

3° La substitution (70)

$$U_i = \frac{1}{R}(V_i + \rho_1 V_{i-1} + \rho_2 V_{i-2} + \ldots)$$

y produit le même effet que la substitution $U_i = \frac{1}{R} V_i$.

Mais, pour tirer de là des conclusions explicites, il faudrait connaître la composition des formes ρ qui entrent dans cette dernière relation. C'est en ce point que réside, je pense, toute la difficulté de la question. Je ne chercherai pas ici à lever cette difficulté, mais je ferai observer que, d'après cet aperçu, nous reconnaissons que :

Théorème XVIII. — *Si l'invariant homogène f des formes simultanées U_2, U_3, ..., ne change pas quand on y remplace U_i par*

$$U_i + \rho_1 U_{i-1} + \rho_2 U_{i-2} + \ldots + \rho_{i-2} U_2,$$

où ρ_j désigne une forme arbitraire de degré j, l'équation aux dérivées partielles $f = 0$ reste inaltérée par toute transformation homographique.

Je répète que ce théorème nous donne des conditions suffisantes, mais non pas nécessaires, pour l'invariance d'une équation aux dérivées partielles.

46. Une partie de l'énoncé XVII n'a plus de sens dans le cas d'une seule variable indépendante. Il n'y a plus, en effet, de forme U, chacune d'elles se réduisant à un seul terme. La proposition se modifie comme il suit :

Théorème XIX. — *Soit $f = 0$ une équation différentielle algébrique entre la variable indépendante x et la fonction y, qui jouisse de la propriété de rester inaltérée par toute transformation homographique. Cette équation étant mise sous forme entière, f est homogène par rapport aux dérivées de y. Soit δ son degré par rapport à ces dérivées; soit, en outre, p la puissance de la constante b par laquelle f se multiplie quand on change x en $\frac{x}{b}$.*

Les points d'une courbe plane de degré m qui satisfont à la condition exprimée par $f = 0$ sont les intersections de cette courbe avec une autre dont le degré est

$$M = (p + \delta) m - 3p.$$

Ainsi, soit $f = y''$, on a

$$\delta = 1, \quad p = 2, \quad M = 3m - 6.$$

Soit pour f le déterminant (36) du n° **28**, on a

$$\delta = 3, \quad p = 9, \quad M = 12m - 27.$$

47. Je vais maintenant faire quelques applications du théorème XVII. Je prendrai, à cet effet, des équations dont la propriété d'invariance découle du théorème XVIII.

En premier lieu, ce théorème nous montre qu'on obtient une équation invariable par les transformations homographiques, en égalant à zéro le discriminant de la forme quadratique U_2. Le degré est égal à k, le poids à 2. Donc

$$(74)\qquad M = (k+2)(m-2).$$

Dans le cas de deux variables indépendantes, on a ainsi $4(m-2)$ pour le degré de la surface qui coupe une surface de degré m suivant le lieu des *points paraboliques*. C'est bien, en effet, le degré de la surface hessienne qui, comme on sait, passe par ce lieu. Il est naturel, d'après (74), de penser que l'équation de degré M, que l'on trouvera dans le cas général, a pour premier membre le hessien de la fonction envisagée. Il en est ainsi effectivement; mais ce n'est pas ici le lieu de le démontrer.

Voici une seconde application. Le *résultant* des formes $U_2, U_3, \ldots, U_{k+1}$ satisfait aux conditions du théorème XVIII. Son degré, par rapport aux coefficients de U_i, est

$$\partial_i = \frac{2.3\ldots(k+1)}{i};$$

par suite, son poids est $2.3\ldots(k+1)$.

Je pose

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k+1} = S_{k+1}.$$

Le degré est $2.3\ldots(k+1)(S_{k+1}-1)$; par suite

$$M = 2.3\ldots(k+1)[S_{k+1}\,m-(k+2)].$$

Ici l'interprétation géométrique est très-simple. Dans l'espace à $(k+1)$ dimensions, j'appelle *ligne droite* l'être défini par k équations linéaires. Une surface étant rapportée à des coordonnées telles qu'on ait à la fois

$$(75)\qquad y = x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0,\quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0,$$

c'est-à-dire l'origine étant sur la surface et le *plan* $y = 0$ étant tangent en ce point à la surface, les équations simultanées

$$y = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad \ldots, \quad U_k = 0$$

déterminent 2, 3, ..., k droites L. On a, aux environs de l'origine,

$$y = U_2 + U_3 + \ldots + U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots;$$

par suite, chacune des droites L a, à l'origine, un contact d'ordre k avec la surface. C'est une généralisation des asymptotes de l'indicatrice :

Dans l'espace à $(k+1)$ *dimensions, en tout point d'une surface, il existe des droites ayant en ce point avec la surface un contact d'ordre* k, *et leur nombre est* 2, 3, ..., k. Je les appelle *droites osculatrices*.

Si, en même temps, U_{k+1} s'évanouit quand on y met les coordonnées d'une de ces droites, cette dernière a alors avec la surface un contact d'ordre $(k+1)$. Elle est *surosculatrice;* donc les points en lesquels une droite devient surosculatrice sont ceux en lesquels le résultant de U_2, U_3, ..., U_{k+1} s'évanouit, les coordonnées de ce point satisfaisant d'ailleurs aux relations (75). Mais cette dernière restriction disparaît, attendu qu'il est évident que la condition n'est pas altérée par les transformations homographiques. Ainsi des considérations géométriques pouvaient faire prévoir que l'équation obtenue en égalant à zéro le résultant ci-dessus restait inaltérée par les transformations homographiques.

J'ai, pour l'application envisagée, l'énoncé suivant :

Le lieu des points d'une surface de degré m [dans l'espace à $(k+1)$ dimensions], *en lesquels une droite osculatrice de la surface lui devient surosculatrice, est l'intersection de cette surface avec une autre dont le degré est*

$$(76) \qquad M = 2.3\ldots(k+1)\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1}\right)m - (k+2)\right].$$

Pour le cas de trois dimensions, la formule (76) donne $M = 11m - 24$, résultat donné depuis longtemps par M. Salmon. J'ajoute que le procédé de démonstration employé par cet auteur s'étendrait sans aucune difficulté au cas de $(k+1)$ dimensions (*).

48. Je ferai enfin une troisième application.

Je prends les $(k-1)$ formes $U_2, U_3, \ldots, U_k$. Si on les égale à zéro et qu'on élimine $(k-2)$ variables, le premier membre de la résultante est une forme binaire. En égalant le discriminant de cette dernière à zéro, on aura l'équation dont il s'agit $f=0$. L'invariant f coïncide avec celui que M. Cayley nomme le *tact-invariant* des formes envisagées. Il est manifeste que cet invariant satisfait à l'énoncé XVIII.

Le tact-invariant de $(k-1)$ formes des degrés $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$ et à k variables est, par rapport aux coefficients de la forme de degré q_i, du degré

$$\partial_i = \frac{q_1 q_2 \ldots q_{k-1}}{q_i}(\Sigma q + q_i - k).$$

En appliquant cette formule, aisée à démontrer, au cas actuel, on trouve

$$p = 2.3\ldots k \frac{k(k-1)}{2}.$$

$$p + \partial = 2.3\ldots k\left[\frac{(k+1)(k-2)}{2} S_k + k\right],$$

S_k ayant la même signification qu'au numéro précédent. Dans le cas où l'on a $k=2$, le tact-invariant se réduit au discriminant de la forme binaire U_2, et les formules ci-dessus s'appliquent encore. On a donc ici une nouvelle généralisation du lieu des points paraboliques. C'est, en effet, ce qui résulte clairement de l'interprétation géométrique de l'équation aux dérivées partielles. Sans m'y arrêter plus longuement, je la rapporte dans cet énoncé :

Le lieu des points d'une surface de degré m [dans l'espace à $(k+1)$ dimensions], *en lesquels deux droites osculatrices se confondent*, *est l'intersection de cette surface avec une autre, dont le degré est*

$$M = 2.3\ldots k\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\frac{(k+1)(k-2)}{2} + k\right]m - \frac{k(k-1)(k+2)}{2}\right\},$$

formule qui, pour $k=2$, donne bien $M = 4(m-2)$.

(*) SALMON FIEDLER, t. II, p. 474.

49. Dans beaucoup de questions géométriques, avec l'emploi des coordonnées homogènes, on a à considérer des équations différentielles, ou aux différences partielles, où les variables indépendantes sont indéterminées. Par exemple, ξ, η, ζ étant des coordonnées ponctuelles dans le plan, l'équation différentielle des lignes droites est

$$f = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = 0,$$

où ξ', ξ'', ... sont les dérivées du premier et du second ordre. Si l'on y fait $\zeta = 1$, et qu'on prenne ξ pour variable indépendante, f se réduit à η''. L'équation est ainsi ramenée à la forme habituelle $\eta'' = 0$. Mais on peut aussi revenir à cette forme en prenant pour variable indépendante et pour fonction $\frac{\xi}{\zeta}$ et $\frac{\eta}{\zeta}$. Soit $\frac{\xi}{\zeta} = x$, $\frac{\eta}{\zeta} = y$. On a, par un calcul facile,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\zeta^3}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^3} f.$$

En donnant au théorème IV une forme nouvelle, on peut, de cette dernière relation, déduire immédiatement $\alpha = 3$, $\beta = -3$. Voici, en effet, quelle forme on peut donner aux théorèmes IV et XVI. Je me borne à un seul énoncé comprenant le cas d'une seule variable indépendante aussi bien que celui où il y en a plusieurs.

Théorème XX. — *Soit $f = 0$ une équation entière aux dérivées partielles entre les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et la fonction y. On prend de nouvelles variables indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_k$, et l'on remplace $x_1, \ldots, x_k$, y par $\frac{\xi_1}{\zeta}, \ldots, \frac{\xi_k}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$. Soit $F = 0$ l'équation transformée, mise également sous forme entière. On a identiquement*

$$f = \frac{1}{\Delta^\alpha \zeta^\beta} F, \tag{77}$$

relation dans laquelle Δ est le déterminant $\sum \pm \zeta \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial \xi_k}{\partial t_k}$, et où α et β sont les mêmes nombres qu'au théorème XVI.

Pour démontrer ce théorème, j'observe d'abord que chaque dérivée partielle de y par rapport aux premières variables indépendantes s'exprime par le quotient de deux fonctions entières des dérivées partielles relatives aux nouvelles variables. On démontrera aisément que le dénominateur est une puissance du déterminant

$$D = \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial x_k}{\partial t_k}.$$

Par suite, si $\mathfrak{F} = 0$ est la transformée, sous forme entière, que l'on obtient par le simple changement des variables indépendantes, on a $f = \frac{1}{D^a} \mathfrak{F}$, a étant un entier positif. Je fais maintenant le second changement, qui consiste à remplacer $x_1, \ldots, x_k, y$ par $\frac{\xi_1}{\zeta}, \ldots, \frac{\xi_k}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$. Soit $F = 0$ la transformée de $\mathfrak{F} = 0$, mise sous forme entière; on a manifestement, en désignant par c un entier positif, $\mathfrak{F} = \frac{1}{\zeta^c} F$. On a d'ailleurs aussi $D = \frac{\Delta}{\zeta^{2k}}$; donc enfin

$$f = \frac{1}{\Delta^a \zeta^{c-2ka}} F. \tag{78}$$

Ainsi la liaison entre f et F est bien de la forme (77) annoncée. Il reste à faire voir que les nombres a et $(c - 2ka)$ coïncident avec les nombres α, β du théorème XVI, ou plutôt définis dans le lemme qui précède ce théorème (n° 58).

J'opère sur les quantités $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta, \zeta$ une substitution linéaire homogène qui les remplace par les quantités $\xi'_1, \ldots, \xi'_k, \eta', \zeta'$. Soit F' ce que devient F, exprimée avec ces nouvelles quantités, sans modification des variables indépendantes. On a alors, au lieu de (78),

$$f = \frac{1}{\Delta^a \zeta^{c-2ka}} F', \tag{79}$$

où je suppose aussi que dans Δ et ζ les substitutions soient faites. Dans cette opération aucun facteur variable ne s'introduit, attendu que toutes les dérivées de $\xi_1, \ldots, \eta, \zeta$ sont, comme les variables mêmes, transformées par la même substitution linéaire.

Les variables indépendantes $t_1, \ldots, t_k$ sont jusqu'à présent indéterminées. Je suppose maintenant qu'elles coïncident avec $\xi'_1, \ldots, \xi'_k$, et je fais en même temps $\zeta' = 1$. Alors F′ n'est autre chose que le premier membre, sous forme entière, de la transformée de f au moyen d'une substitution homographique. La variable ζ coïncide avec le dénominateur commun des expressions de $x_1, \ldots, x_k, y$ en fonction de $\xi'_1, \ldots, \xi'_k, \eta$. En outre, on reconnaîtra sans peine que Δ coïncide avec l'expression désignée dans le lemme (**38**) par R; par suite, la relation (79) coïncide avec celle qui fait l'objet de ce lemme. Par suite, le théorème XX est démontré.

50. Je ne donnerai ici aucune application du théorème XX, me réservant de le faire dans une autre occasion. En terminant ce Mémoire, je ferai observer que, dans le cas où il existe plus d'une variable indépendante, je n'ai pas abordé le second des deux problèmes posés au début. Il ne me semble guère possible de le faire dans l'état actuel de nos connaissances à l'égard des singularités des surfaces.

Dans le même ordre d'idées, d'autres problèmes plus difficiles peuvent être posés. On peut chercher le nombre des points d'une courbe *gauche* algébrique qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle; le nombre des points d'une surface qui satisfont à deux conditions exprimées par deux équations aux dérivées partielles, etc. Comme on le voit, le sujet abordé dans ce Mémoire est loin d'être épuisé.

Extrait d'une Lettre à M. Hermite, relative à l'application des fonctions elliptiques à la théorie des perturbations;

Par M. HUGO GYLDÉN,

Directeur de l'Observatoire de Stockholm.

N'ayant jusqu'à ces derniers temps fait que des applications de la formule (4) (*voir* les *Comptes rendus* du 26 avril 1875), il m'est entièrement échappé que l'argument du facteur $\{1 + (\Phi)\cos[2x + (\Lambda)]\}$ de la formule (5) ne doit pas signifier l'intégrale elliptique, mais la limite à laquelle on parvient par les procédés suivants.

La seconde des équations

$$\sin 2\,\mathrm{am}\, u = \frac{\sqrt{1 - k_1^2}\cos\mathrm{am}(\mathrm{K}_1 - u_1)}{1 - k_1 \sin\mathrm{am}(\mathrm{K}_1 - u_1)} = \frac{\sqrt{1 - k_1^2}\sin 2\,\mathrm{am}\, u'_1}{1 - k_1\cos 2\,\mathrm{am}\, u'_1},$$

$$\cos 2\,\mathrm{am}\, u = \frac{\sin\mathrm{am}(\mathrm{K}_1 - u_1) - k_1}{1 - k_1\sin\mathrm{am}(\mathrm{K}_1 - u_1)} = \frac{\cos 2\,\mathrm{am}\, u'_1 - k_1}{1 - k_1\cos 2\,\mathrm{am}\, u'_1}$$

peut évidemment être remplacée par la suivante :

$$\mathrm{tang\,am}\, u = \sqrt{\frac{1 + k_1}{1 - k_1}}\,\mathrm{tang\,am}\, u'_1.$$

Supposons, de plus, $\mathrm{am}(\mathrm{K}_2 - u'_2) = \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{am}\, u''_2$, on aura de la même manière

$$\mathrm{tang\,am}\, u'_1 = \sqrt{\frac{1 + k_2}{1 - k_2}}\,\mathrm{tang\,am}\, u''_2,$$

et ainsi de suite. Par de telles opérations, on parvient rapidement à une certaine limite (u) des variables $\mathrm{am}\, u'_1$, $\mathrm{am}\, u''_2$, ..., dont la valeur peut être calculée à l'aide de la formule

$$\operatorname{tang}(u) = \sqrt{\frac{(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3)\dots}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\dots}} \operatorname{tang} \operatorname{am} u.$$

Au moyen de cette équation et des relations connues entre l'amplitude et l'intégrale elliptique, on déduit facilement les relations entre les arguments (u) et x en forme des séries, et par conséquent il est aussi facile d'établir des formules destinées à transformer une expression développée suivant l'argument (u) en une autre dont l'argument serait x.

Parmi les relations mentionnées dont le nombre est très-grand, je veux réciter un seul résultat numérique. Dans tous les calculs qui avaient pour objet les perturbations cométaires, j'ai adopté les valeurs

$$\log k = 9,99736685 - 10,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\log k_1 &= 9,9042551 - 10,\\
\log k_2 &= 9,4018330 - 10,\\
\log k_3 &= 8,215765 \quad - 10,\\
\log k_4 &= 5,8295 - 10,
\end{aligned}$$

lesquelles me donnaient

$$\begin{aligned}
(u) = x &- 26236'',58 \sin 2x\\
&- 11286,05 \sin 4x\\
&+ 1618,50 \sin 6x\\
&+ 198,96 \sin 8x\\
&- 84,35 \sin 10x\\
&+ 1,04 \sin 12x\\
&+ 3,87 \sin 14x\\
&- 0,52 \sin 16x\\
&- 0,16 \sin 18x\\
&+ 0,05 \sin 20x\\
&+ 0,01 \sin 22x.
\end{aligned}$$

Il me reste maintenant à transformer le produit

$$[1 - k_1 \sin\operatorname{am}(K_1 - u_1)][1 - k_2 \sin\operatorname{am}(K_2 - u'_2)]\ldots$$

en fonction de l'argument (u). Dans ce but, je fais la remarque que

$$\begin{aligned} & 1 - k_1 \sin\operatorname{am}(K_1 - u_1) \\ & \quad = 1 - k_1 \cos 2\operatorname{am} u'_1 = 1 - k_1 \frac{\sin\operatorname{am}(K_2 - u'_2) - k_2}{1 - k_2 \sin\operatorname{am}(K_2 - u'_2)} \\ & \qquad = \frac{1 + k_1 k_2 - (k_1 + k_2)\sin\operatorname{am}(K_2 - u'_2)}{1 - k_2 \sin\operatorname{am}(K_2 - u'_2)}. \end{aligned}$$

Or, posant $\varkappa_2 = \dfrac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2}$, nous aurons

$$\begin{aligned} & [1 - k_1 \sin\operatorname{am}(K_1 - u_1)][1 - k_2 \sin\operatorname{am}(K_2 - u'_2)] \\ & \quad = (1 + k_1 k_2)[1 - \varkappa_2 \sin\operatorname{am}(K_2 - u'_2)]. \end{aligned}$$

Par des opérations tout à fait semblables, on parvient à la formule

$$\begin{aligned} & [1 - \varkappa_2 \sin(K_2 - u'_2)][1 - k_3 \sin\operatorname{am}(K_3 - u''_3)] \\ & \quad = (1 + \varkappa_2 k_3)[1 - \varkappa_3 \sin\operatorname{am}(K_3 - u''_3)], \end{aligned}$$

où la quantité $\varkappa_3$ s'obtient au moyen de l'équation

$$\varkappa_3 = \frac{\varkappa_2 + k_3}{1 + \varkappa_2 k_3}.$$

On a donc, en multipliant ces deux résultats,

$$\begin{aligned} & [1 - k_1 \sin(K_1 - u_1)][1 - k_2 \sin(K_2 - u'_2)][1 - k_3 \sin(K_3 - u''_3)] \\ & \quad = (1 + k_1 k_2)(1 + \varkappa_2 k_3)[1 - \varkappa_3 \sin\operatorname{am}(K_3 - u''_3)]. \end{aligned}$$

De la même manière, on pourrait répéter ces transformations, par lesquelles on parviendra à ce résultat

$$\begin{aligned} & [1 - k_1 \sin(K_1 - u_1)][1 - k_2 \sin(K_2 - u'_2)]\ldots \\ & \quad = (1 + k_1 k_2)(1 + \varkappa_2 k_3)\ldots[1 - (\varkappa)\cos 2(u)] \text{ [*]}, \end{aligned}$$

où l'on a désigné par $(\varkappa)$ la limite des quantités $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$.

---

[*] On peut encore remarquer l'équation

$$(1 + k_1 k_2)(1 + \varkappa_2 k_3)\ldots = \frac{(1 - k_1)(1 - k_2)\ldots}{1 - (\varkappa)}.$$

Au lieu de l'équation (5), nous aurons maintenant

$$\frac{T_1}{m'_0} = \frac{(1 - k_1\Phi_1 \cos\Lambda)(1 - k_2\Phi_2\cos\Lambda_1)\ldots}{(1-k_1)(1-k_2)\ldots}\,\frac{1-(\varkappa)}{1-(\varkappa)\cos 2(u)}\left\{1 + (\Phi)\cos[2(u) + (\Lambda)]\right\},$$

dont les puissances négatives et fractionnaires se développeront aisément suivant l'argument (u), après quoi, par une opération très-facile, on pourrait introduire l'argument x au lieu de (u). Par cette dernière opération, on obtient des séries généralement encore plus convergentes que celles dont l'argument est (u).

Cependant, on parvient directement à un résultat semblable en partant de l'équation (4). On est donc en état de choisir entre deux formules de départ, lesquelles diffèrent l'une de l'autre par les valeurs des coefficients constants et par les définitions des variables. Pour mieux juger leurs avantages, on doit remarquer que, dans les cas difficiles à traiter, la valeur numérique de (Φ) est un peu moindre que celle de Φ_1 ; mais, d'un autre côté, que $(\varkappa)$ est toujours un peu plus grand que K_1.

Je vous demande maintenant, Monsieur, la permission de vous présenter une petite application numérique des formules mentionnées dans ce qui précède. Pour ce but, je reprends dans le calcul des perturbations de la comète d'Encke produites par Jupiter l'expression suivante :

$$\begin{aligned}(\Delta)_4^2 = 45{,}851280 &+ 43{,}776934 \cos\xi - 3{,}208675 \sin\xi \\ &- 0{,}977196 \cos 2\xi - 0{,}326279 \sin 2\xi \\ &+ 0{,}027577 \cos 3\xi - 0{,}024532 \sin 3\xi \\ &- 0{,}000661 \cos 4\xi - 0{,}001430 \sin 4\xi + \ldots,\end{aligned}$$

où l'on a désigné par $(\Delta)_4$ la distance mutuelle entre la comète et Jupiter, la comète restant dans une portion de l'orbite voisine de l'orbite de la planète, et par ξ l'angle $c' + F = c' + 212°18'$, $c' + \frac{n'}{n}\pi$ étant l'anomalie moyenne de Jupiter à l'instant du passage de la comète par le périhélie. On a, de plus, supposé une valeur numérique spéciale pour l'anomalie partielle, laquelle a été introduite dans l'expression générale pour $(\Delta)_4^2$. Par une transformation très-facile à effectuer, on obtient

$$\frac{(\Delta)_4^2}{1 - 0{,}043283\cos\xi + 0{,}018066\sin\xi} = 46{,}769689 + 45{,}736892\cos\xi - 2{,}378345\sin\xi + E.$$

E désignant la somme de termes très-petits de l'ordre e'^2 et dépendant de $\cos 3\xi$, $\sin 3\xi$, ..., dont la valeur numérique est toujours au-dessous de 0,05.

Soit maintenant

$$T_1 = 46,769689 + 45,736892 \cos\xi - 2,378345 \sin\xi;$$

on voit aisément que le développement des puissances $T_1^{-\frac{n}{2}}$ suivant les multiples de ξ n'est pas assez convergent pour servir comme point de départ pour les calculs numériques. En effet, posant

$$m'_0 = 46,769689 \quad \text{et} \quad \frac{T_1}{m'_0} = 1 + \Phi \cos(\xi + A),$$

on a

$$\Phi = 0,9792389, \quad A = 2^\circ 58' 36'',02.$$

Par l'introduction d'un nouveau paramètre β déterminé par l'équation $\Phi = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$, on obtient

$$\left(\frac{T_1}{m'_0}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{(1+\beta)^{\frac{n}{2}}}{[1 + 2\beta\cos(\xi + A) + \beta^2]^{\frac{n}{2}}}, \quad \beta = 0,814925.$$

Faisons maintenant usage des transformations auxquelles donne naissance l'introduction des fonctions elliptiques. Pour ce but, nous supposons

$$\xi = 2\,\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x\ (\mathrm{mod.}\ k),\ \psi = \mathrm{am}\frac{2K_1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\left(\mathrm{mod.}\ k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right),$$

après quoi l'on aura

$$(1.) \qquad \left(\frac{T_1}{m'_0}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{1 - k_1\sin\psi}{1 - k_1\Phi\cos A}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{[1 + \Phi_1\sin(\psi - A_1)]^{\frac{n}{2}}},$$

$$\Phi_1 = 0,8274645, \quad A_1 = 9^\circ 48' 5'',25.$$

Soient $\Phi_1 = \frac{2\beta_1}{1+\beta_1^2}$, $\beta_1 = 0{,}5299105$; on obtient

$$\left(\frac{T_1}{m'_0}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{(1 - k_1 \sin\psi)^{\frac{n}{2}}}{(1 - k_1 \Phi \cos A)^{\frac{n}{2}}} \frac{(1+\beta_1^2)^{\frac{n}{2}}}{[1 + 2\beta_1 \sin(\psi - A_1) + \beta_1^2]^{\frac{n}{2}}}.$$

Jetant un coup d'œil sur les valeurs de β et de β_1, on sera convaincu que les développements suivant les multiples de ψ seront essentiellement plus convergents que ceux qui procèdent suivant les multiples de ξ. On obtiendra des séries encore un peu plus convergentes en introduisant la variable x au lieu de ψ; mais cette proposition est difficile à démontrer d'une manière purement analytique.

A partir de l'expression ($\mathcal{A}$), on déduit aisément des formules nouvelles, dans plusieurs cas très-importants, pour les calculs numériques. Par exemple, en observant que la différence $\Phi_1 \cos A_1 - k_1$ et la quantité $\Phi_1 \sin A_1$ ont des valeurs numériques assez petites, on peut développer $T_1^{-\frac{n}{2}}$ suivant les puissances ascendantes de

$$V = \frac{(\Phi_1 \cos A_1 - k_1) \sin\psi - \Phi_1 \sin A_1 \cos\psi}{1 + k_1 \sin\psi},$$

dont la valeur numérique dans notre exemple ne surpasse pas 0,2686537.

Au lieu de la formule ($\mathcal{A}$), nous aurons maintenant

$$\left(\frac{T_1}{m'_0}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{(1 - K_1 \Phi \cos A)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1 - k_1 \sin\psi}{1 + k_1 \sin\psi}\right)^{\frac{n}{2}} \left[1 - \frac{n}{2} V + \frac{n(n+2)}{2.4} V^2 - \dots\right],$$

dont les différents termes, multipliés par le facteur $\left(\frac{1 - k_1 \sin\psi}{1 + k_1 \sin\psi}\right)^{\frac{n}{2}}$, peuvent être transformés en séries trigonométriques ayant pour argument x. Nous travaillerons, moi et mes aides, à des Tables destinées à convertir les fonctions

$$\left(\frac{1 - k_1 \sin\psi}{1 + k_1 \sin\psi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} m\psi}{(1 + k_1 \sin\psi)^r} \quad \text{et} \quad \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} m\psi}{(1 - k_1^2 \sin\psi^2)^{\frac{n}{2}} (1 + k_1 \sin\psi)^r}$$

en de telles séries.

En continuant les transformations successives de Φ et A, on trouve

$$\Phi_2 = 0,7294278, \qquad A_2 = 13^\circ.36'.24'',58,$$
$$\Phi_3 = 0,7218830, \qquad A_3 = 13.54.54,99,$$
$$\Phi_4 = (\Phi) = 0,7218712, \quad A_4 = (A) = 13.54.58,23.$$

Craignant d'abuser de votre indulgence, j'ose ajouter comme exemples deux résultats numériques du calcul des perturbations de la comète d'Encke. Le premier donne des inégalités en longitude du périhélie produites par Jupiter, l'autre celles qui sont produites par la Terre. Dans les deux cas, on a regardé seulement des portions de l'orbite cométaire dans lesquelles les rapprochements les plus sensibles entre la comète et les corps troublants ont lieu.

$$\Psi = \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}\,d\pi =$$

$\Psi_0 + 278'',69\cos\omega_3$	$+32'',17\cos 2\omega$	$-1'',90\cos 3\omega_3$	$-0'',94\cos 4\omega_3$	$-0'',05\cos 5\omega_3$ ...
$-476,30\cos 2x\cos\omega_3$	$-75,78\cos 2x\cos 2\omega_3$	$+2,79\cos 2x\cos 3\omega_3$	$+2,43\cos 2x\cos 4\omega_3$	$+0,18\cos 2x\cos 4\omega_3$ ...
$+284,09\cos 4x\cos\omega_3$	$+88,53\cos 4x\cos 2\omega_3$	$+0,91\cos 4x\cos 3\omega_3$	$-3,29\cos 4x\cos 4\omega_3$	$-0,41\cos 4x\cos 5\omega$ ...
$-31.37\cos 6x\cos\omega_3$	$-71,56\cos 6x\cos 2\omega_3$	$-6,79\cos 6x\cos 3\omega_3$	$+3,15\cos 6x\cos 4\omega_3$	$+0,72\cos 6x\cos 5\omega_3$ ...
$-35,03\cos 8x\cos\omega_3$	$+40,50\cos 8x\cos 2\omega_3$	$+9,92\cos 8x\cos 3\omega_3$	$-1,94\cos 8x\cos 4\omega_3$	$-0,89\cos 8x\cos 5\omega_3$ ...
$+39,71\cos 10x\cos\omega_3$	$-15,14\cos 10x\cos 2\omega_3$	$-9,26\cos 10x\cos 3\omega_3$	$+0,42\cos 10x\cos 4\omega_3$	$+0,85\cos 10x\cos 5\omega_3$ ...
$-20,94\cos 12x\cos\omega_3$	$+1,31\cos 12x\cos 2\omega_3$	$+6,24\cos 12x\cos 3\omega_3$	$+0,66\cos 12x\cos 4\omega_3$	$-0,61\cos 12x\cos 5\omega_3$ ...
$+7,38\cos 14x\cos\omega_3$	$+2,85\cos 14x\cos 2\omega_3$	$-3,06\cos 14x\cos 3\omega_3$	$-1,04\cos 14x\cos 4\omega_3$	$+0,30\cos 14x\cos 5\omega_3$ ...
$-1,39\cos 16x\cos\omega_3$	$-2,64\cos 16x\cos 2\omega_3$	$+0,95\cos 16x\cos 3\omega_3$	$+0,89\cos 16x\cos 4\omega_3$	$-0,05\cos 16x\cos 5\omega_3$ ...
$-0,25\cos 18x\cos\omega_3$	$+1,40\cos 18x\cos 2\omega_3$	$+0,03\cos 18x\cos 3\omega_3$	$-0,55\cos 18x\cos 4\omega_3$	$-0,08\cos 18x\cos 5\omega_3$ ...
$+0,30\cos 20x\cos\omega_3$	$-0,49\cos 20x\cos 2\omega_3$	$-0,27\cos 20x\cos 3\omega_3$	$+0,24\cos 20x\cos 4\omega_3$	$+0,11\cos 20x\cos 5\omega_3$ ...
$-0,10\cos 22x\cos\omega_3$	$+0,09\cos 22x\cos 2\omega_3$	$+0,22\cos 22x\cos 3\omega_3$	$-0,06\cos 22x\cos 4\omega_3$	$-0.09\cos 22x\cos 5\omega_3$ ...
.....	.....	.....	.....	.....
$-303,63\sin 2x\cos\omega_3$	$+38,65\sin 2x\cos 2\omega_3$	$+12,56\sin 2x\cos 3\omega_3$	$+0,29\sin 2x\cos 4\omega_3$	$-0,30\sin 2x\cos 5\omega_3$ ...
$+391,76\sin 4x\cos\omega_3$	$-36,36\sin 4x\cos 2\omega_3$	$-19,43\sin 4x\cos 3\omega_3$	$-1,18\sin 4x\cos 4\omega_3$	$+0,51\sin 4x\cos 5\omega_3$ ...
$-239,63\sin 6x\cos\omega_3$	$-3,71\sin 6x\cos 2\omega_3$	$+17,16\sin 6x\cos 3\omega_3$	$+2,52\sin 6x\cos 4\omega_3$	$-0,49\sin 6x\cos 5\omega_3$ ...
$+109,46\sin 8x\cos\omega_3$	$+20,97\sin 8x\cos 2\omega_3$	$-10,57\sin 8x\cos 3\omega_3$	$-3,28\sin 8x\cos 4\omega_3$	$+0,23\sin 8x\cos 5\omega_3$ ...
$-33,03\sin 10x\cos\omega_3$	$-21,62\sin 10x\cos 2\omega_3$	$+3,75\sin 10x\cos 3\omega_3$	$+3,07\sin 10x\cos 4\omega_3$	$+0,11\sin 10x\cos 5\omega_3$ ...
$+2,40\sin 12x\cos\omega_3$	$-13,76\sin 12x\cos 2\omega_3$	$+0,49\sin 12x\cos 3\omega_3$	$-2,16\sin 12x\cos 4\omega_3$	$-0,36\sin 12x\cos 5\omega_3$ ...
$+3,71\sin 14x\cos\omega_3$	$-6,17\sin 14x\cos 2\omega_3$	$-1,95\sin 14x\cos 3\omega_3$	$+1,10\sin 14x\cos 4\omega_3$	$+0,44\sin 14x\cos 5\omega_3$ ...
$-2,78\sin 16x\cos\omega_3$	$+1,76\sin 16x\cos 2\omega_3$	$+1,75\sin 16x\cos 3\omega_3$	$-0,31\sin 16x\cos 4\omega_3$	$-0,37\sin 16x\cos 5\omega_3$ ...
$+1,02\sin 18x\cos\omega_3$	$-0,02\sin 18x\cos 2\omega_3$	$-1,03\sin 18x\cos 3\omega_3$	$-0,09\sin 18x\cos 4\omega_3$	$+0,23\sin 18x\cos 5\omega_3$ ...
$-0,17\sin 20x\cos\omega_3$	$-0,32\sin 20x\cos 2\omega_3$	$+0,43\sin 20x\cos 3\omega_3$	$+0,19\sin 20x\cos 4\omega_3$	$-0,10\sin 20x\cos 5\omega_3$ ...
$-0,05\sin 22x\cos\omega_3$	$+0,22\sin 22x\cos 2\omega_3$	$-0,10\sin 22x\cos 3\omega_3$	$-0,15\sin 22x\cos 4\omega_3$	$+0,02\sin 22x\cos 5\omega_3$ ...
.....	.....	.....	.....	.....

Les calculs numériques sont effectués par M. Asten. (Voir *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XVIII, n° 10.)

Dans l'expression précédente, on a posé

$$x = \frac{\pi}{2K}\int_0^{\frac{1}{2}\xi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},\quad \xi = c' + 212^\circ 18',\quad \log k = 9{,}99736685,$$

$$n(t-T_0) = -\int\frac{(1+e^2)\,d\lambda}{\left[1+\frac{2e}{1-e}\,l^2\left(\sin\operatorname{am}\frac{2L}{\pi}\lambda\right)^2\right]^2}\frac{2l}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2L}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2L}{\pi}\lambda,$$

$$\log l = 8{,}9402960 - 10,$$

n étant le mouvement moyen de la comète et T_0 le temps du passage par l'aphélie. La relation entre ω_3 et λ est enfin la suivante :

$$\sin\lambda = (\sin\tfrac{1}{2}\omega_3)^2.$$

Les calculs des perturbations produites par la Terre sont faites par MM. Backlund (un assistant de notre Observatoire) et Bonsdorff (astronome et Directeur de l'Observatoire de Jachkent). Ces Messieurs ont obtenu le résultat suivant :

$$\Psi - \frac{2}{\sqrt{1-e}}\,d\pi =$$

$\Psi_0 + 6'',47\cos\mu$	$+3'',12\cos 2\mu$	$+1'',03\cos 3\mu$	$+0'',20\cos 4\mu$	...
$-10,58\cos 2x\cos\mu$	$-5,24\cos 2x\,2\mu$	$-1,83\cos 2x\cos 3\mu$	$-0,39\cos 2x\cos 4\mu$	...
$-6,18\cos 4x\cos\mu$	$+3,27\cos 4x\cos 2\mu$	$+1,29\cos 4x\cos 3\mu$	$+0,34\cos 4x\cos 4\mu$	...
$-2,11\cos 6x\cos\mu$	$-1,44\cos 6x\cos 2\mu$	$-0,24\cos 6x\cos 3\mu$	$-0,04\cos 6x\cos 4\mu$	...
$0,70\cos 8x\cos\mu$	$-0,56\cos 8x\cos 2\mu$	$+0,32\cos 8x\cos 3\mu$	$+0,18\cos 8x\cos 4\mu$	...
$-0,18\cos 10x\cos\mu$	$-0,17\cos 10x\cos 2\mu$	$-0,13\cos 10x\cos 3\mu$	$-0,07\cos 10x\cos 4\mu$	...
.....	.....	.....	.....	.....
$-2,83\sin 2x\cos\mu$	$-1,03\sin 2x\cos 2\mu$	$-0,20\sin 2x\cos 3\mu$	$+0,01\sin 2x\cos 4\mu$	...
$+3,07\sin 4x\cos\mu$	$+1,51\sin 4x\cos 2\mu$	$+0,32\sin 4x\cos 3\mu$	$-0,10\sin 2x\cos 4\mu$	...
$-0,74\sin 6x\cos\mu$	$-0,67\sin 6x\cos 2\mu$	$-0,28\sin 6x\cos 3\mu$	$-0,04\sin 6x\cos 4\mu$	...
$-0,40\sin 8x\cos\mu$	$+0,30\sin 8x\cos 2\mu$	$+0,15\sin 8x\cos 3\mu$	$+0,03\sin 8x\cos 4\mu$	.
$-0,10\sin 10x\cos\mu$	$-0,09\sin 10x\cos 2\mu$	$-0,07\sin 10x\cos 3\mu$	$-0,03\sin 10x\cos 4\mu$	...

....

Dans ces formules les variables sont déterminées de la manière suivante :

$$x = \frac{\pi}{2K}\int_0^{\frac{1}{2}\xi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}}, \quad \xi = c' + 47^\circ 20' 42'',4, \quad \log k = 9,99736685,$$

$$n(t - T_0) = \int \left[1 - e + 2eh^2 \left(\sin \operatorname{am} \frac{2H}{\pi}\omega\right)^2\right] 2h \frac{2H}{\pi} \cos \operatorname{am} \frac{2H}{\pi} \omega\, d\omega,$$

$h = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et T_0 désignant le temps du passage par le périhélie auquel l'anomalie moyenne c' appartient.

$$\begin{aligned} &\sin\omega = + \sin\tfrac{1}{2}\omega'^2,\\ &\sin\tfrac{1}{2}\omega' = l \sin\tfrac{1}{2}\lambda, \quad \log l = 9,8616763,\\ &\cos\lambda_1 = -(\cos\tfrac{1}{2}\mu)^2. \end{aligned}$$

On a désigné par Ψ_0 la constante d'intégration qui doit être déterminée séparément pour chaque révolution de la comète. Or, la quantité Ψ_0 doit être regardée comme une fonction de x, qu'on peut déterminer par la sommation analytique des expressions

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\cos 2ix_0 + \cos 2ix_1 + \ldots + \cos 2ix_{s-1} + \tfrac{1}{2}\cos 2ix_s,\\ &\tfrac{1}{2}\sin 2ix_0 + \sin 2ix_1 + \ldots + \sin 2ix_{s-1} + \tfrac{1}{3}\sin 2ix_3, \end{aligned}$$

s désignant le nombre indéterminé des révolutions de la comète à partir d'une époque certaine, et

$$x_s = \frac{\pi}{2K}\int_0^{\frac{1}{2}\xi_s} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}}, \quad \xi_s = c'_s + 47^\circ 20' 42'',4, \quad c'_1 = c'_0 + 2\frac{n'}{n}\pi,$$
$$c'_2 = c'_0 + 4\frac{n'}{n}\pi, \ldots.$$

Les calculs numériques pour effectuer ces sommations ne sont pas encore achevés. Ayant employé dans les deux cas la même valeur numérique du module des fonctions elliptiques, on a néanmoins obtenu des séries suffisamment convergentes; ce qui montre que, dans des cas assez différents, on peut se servir d'une seule valeur du module.

Extrait d'une Lettre adressée à la rédaction;

Par M. H. LAURENT.

Je viens de lire une Lettre qui vous est adressée par M. Darboux, et dans laquelle il réclame pour lui la priorité au sujet d'une formule qu'il aurait publiée il y a deux ans. M. Darboux voudra bien se rappeler qu'avant la guerre de 1870 je lui ai donné, à lui-même, un Mémoire lithographié dans lequel se trouvait consignée la formule en question.

D'ailleurs, ne connaissant pas le Mémoire de M. Christoffel, je suis prêt à lui reconnaître tous ses droits.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME SÉRIE. — TOME II.

FIN DU TOME II DE LA TROISIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMP. DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, QUAI DES AUGUSTINS, 55.